Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270371
Centre d'intérêt: 89

Fortier, Marielle.

Recherche en apprentissage et en enseignement sur les diviseurs d'un nombre : rapport d'étape / par M. Fortier, S. Héraud, L. Thérien ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1979.
87 p. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 27)

En tête du titre: Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

Cote Dewey: 510.7/F741r Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Expérimentation pédagogique *Théorie de l'apprentissage *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Diviseur *Nombre *Unité d'enseignement

Compte rendu d'une démarche de recherche qui a pour but l'élaboration d'une unité d'enseignement au primaire sur les relations et les propriétés numériques rattachées à la notion de diviseur (par exemple: décomposition en facteurs, plus grand commun diviseur, nombres pairs, etc.). Le développement de l'unité d'enseignement est fondé sur les actions et les schèmes opératoires naturels à l'enfant ou efficaces, que des expérimentations avec des enfants de différents niveaux ont permis de déceler. En d'autres termes, on observe les groupements élaborés par les enfants dans la recherche des diviseurs et on utilise les renseignements recueillis au cours de l'expérimentation dans la construction d'une unité d'enseignement.

Une première étape a eu lieu en octobre 1978 avec quatre enfants âgés de quatre, cinq, six et neuf ans. La seconde s'est déroulée en janvier 1979 auprès de 34 enfants de la prématernelle à la sixième année. Suit, en février 1979, une expérience auprès de 18 enfants de deuxième, troisième et quatrième années. La quatrième étape (avril 1979) concerne 36 enfants de deuxième et troisième années. La dernière (septembre 1979) concerne à nouveau 36 enfants de ces deux degrés. Pour chacune de ces étapes, le rapport présente les objectifs particuliers, le type d'expérimentation, les résultats et les conclusions.

Type de document: r
Notice(s) connexe(s): 8270373
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGEC
Programme(s) de subvention - FCAC

Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270371

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Juillet 1979 Rapport No 27

# RECHERCHE EN APPRENTISSAGE ET EN ENSEIGNEMENT SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE

Rapport d'étape

par
M. Fortier, B. Héraud, L. Thérien

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques et d'informatique

E D U Q 8270371

SECTION ENSEIGNEMENT

# Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

Juillet 1979 Rapport No 27

## RECHERCHE EN APPRENTISSAGE ET EN ENSEIGNEMENT SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE

Rapport d'étape

par
M. Fortier, B. Héraud, L. Thérien

Projet de recherche subventionné
par le programme FCAC
du Ministère de l'Education du Québec

TABLE DES MATIERES


Avertissement au lecteur p. 2
Objectif général

ETAPE 1 (octobre 78) p. 3

A. Objectifs particuliers
B. Expérimentation (matériel - nombres - clientèle - déroulement)
C. Résultats
D. Conclusions

ETAPE 2 (janvier 79) p. 5

A. Objectifs particuliers
B. Expérimentation
C. Résultats
D. Conclusions

ETAPE 3 (février 79) p. 8

A. Objectifs particuliers
B. Expérimentation
C. Résultats
D. Conclusions

ETAPE 4 (avril 79) p. 11

A. Objectifs particuliers
B. Expérimentation
$C_1$ Résultats avec matériel A

$C_2$ Résultats avec matériel B

D. Insertion de l'expérimentation sur les diviseurs dans le contexte des groupements p. 36
E. Analyse théorique de la participation des actions dans l'atteinte des diviseurs des nombres 30, 48 et 60 p. 49
F. Propriétés arithmétiques et implications pédagogiques reliées à chaque action p. 74
G. Extension possible de la recherche p. 89
H. Conclusions p. 90

ETAPE 5 (septembre 79) p. 91

A. Objectifs particuliers
B. Expérimentation

Annexes p. 93

# Recherche en apprentissage et en enseignement sur les diviseurs d'un nombre

## Avertissement au lecteur

Ce document se veut être le compte rendu d'une démarche de recherche et non son produit final. On y trouvera donc toutes les hésitations, essais et corrections successifs qui y sont propres. Ce choix de présentation poursuit un double but: d'abord, permettre aux chercheurs impliqués de garder en mémoire les difficultés et les étapes rencontrées, de même que les pistes de recherche négligées en cours de route; ensuite, présenter un exemple de démarche aux futurs chercheurs en didactique de la mathématique, notamment les candidats à la maîtrise (MEE).

## Objectif général

Cette recherche a pour but l'élaboration d'une unité d'enseignement au primaire sur les relations et les propriétés numériques rattachées à la notion de diviseur (par exemple: décomposition en facteurs, plus grand commun diviseur, nombres pairs, nombres premiers, associativité, distributivité, etc.). Le développement de l'unité d'enseignement sera fondé sur les actions et les schèmes opératoires naturels à l'enfant ou efficaces, que des expérimentations avec des enfants de différents niveaux auront permis de déceler. En d'autres termes, on observera les groupements élaborés par les enfants dans la recherche des diviseurs et on utilisera les renseignements recueillis au cours de l'expérimentation dans la construction d'une unité d'enseignement.

## Etape 1 (octobre 78)

A. Objectif particulier

Analyser la pertinence du matériel choisi.

B. Expérimentation

Matériel: poupées miniatures - bonbons.

Nombres: 6 - 5 - 1 - 9 - 12

Clientèle: 4 ans - 1 enfant
5 ans - 7 mois - 1 enfant
6 ans - 3 mois - 1 enfant
9 ans - 5 mois - 1 enfant

Déroulement

Question: On a des bonbons. On a des enfants.
On veut donner tous les bonbons à des enfants.
Combien d'enfants peux-tu prendre pour être capable de donner la même chose à chaque enfant sans qu'il en reste et sans les couper?
Cherche toutes les façons possibles.

Aucune intervention n'est faite au cours de l'expérimentation, sauf une répétition de la dernière phrase, si nécessaire.

C. Résultats

-Le matériel présente beaucoup de "bruits" pour les enfants de 4 - 5 - 6 ans: attraits différents des poupées - couleurs - etc.

-Les enfants plus âgés ne se servent pas du matériel.

-La manipulation qui consiste à distribuer des bonbons se fait tout naturellement.

-Les actions sont difficilement observables.

D. Conclusions

1)Chercher un autre matériel plus neutre.

2)Préparer une grille d'observation.

3)Déterminer une clientèle plus précise et plus diversifiée.

## Etape 2 (janvier 79)

### A. Objectifs particuliers

1)Dégager la fréquence d'utilisation respective des deux approches de la division: partage - mesure.

2)Découvrir les "stratégies" spontanément utilisées par les enfants dans la recherche des diviseurs.

3)Etablir des étapes de développement de la notion de diviseur selon l'âge des enfants, comme Noelting l'a fait pour la notion de proportion.

4)Chercher le rôle de la correspondance terme à terme (diviseur 1).

5)Observer le moment d'apparition, comme diviseur, du nombre lui-même.

### B. Expérimentation

**Matériel:** plateaux (cartons sur lesquels étaient collés un certain nombre (1 à 13) d'assiettes)
jetons (1 à 12).

**Nombres:** 6 - 5 - 1 - 9 - 12

**Clientèle:** 34 enfants de pré-maternelle à 6e année inclusivement (4 à 11 ans).
Ecoles Carillon - Champlain - N-Dame-de Liesse - St-Esprit - Université (maternelle).

**Déroulement:**

Question: Quel plateau peux-tu prendre pour qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque assiette? Tu peux mettre plusieurs jetons par assiette.
Peux-tu le faire avec d'autres? (au cours de l'expérimentation)

**Grille d'observation:** voir Annexe

C. **Résultats**

| | partage | mesure | corr.t.à .. au ler succès | nombre donné comme diviseur | facteurs atteints | succès / essais | " Stratégies " hasard | approxi-mation essais-erreurs | prog. linéaire | multi-plication | division | addition |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 ans | 1 | 0 | 0.58 | 0.91 | 0.75 | 0.48 | 1 | 0.33 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 ans | 1 | 0 | 0.19 | 1 | 0.86 | 0.38 | 1 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1ère | 1 | 0.50 | 0.50 | 0.38 | 0.70 | 0.55 | 0.50 | 0.50 | 0.75 | 0 | 0 | 0.25 |
| 2e | 0.60 | 0.80 | 0.90 | 0.60 | 0.77 | 0.66 | 0.50 | 0.50 | 0.80 | 0 | 0 | 0 |
| 3e | 1 | 0.80 | 0.40 | 0.85 | 0.93 | 0.90 | 0.20 | 0.50 | 0.20 | 0 | 0 | 0.20 |
| 4e | 0.40 | 0.60 | 0.95 | 0.60 | 0.77 | 0.90 | 0 | 0.20 | 0.60 | 0.20 | 0.20 | 0 |
| 5e | 0.60 | 0.40 | 0.75 | 0.60 | 0.88 | 0.98 | 0 | 0 | 0.20 | 0.50 | 0.60 | 0 |
| 6e | 1 | 0 | 0.66 | 1 | 1 | 1.00 | 0 | 0 | 0.60 | 0.50 | 0.20 | 0 |

TABLEAU 1

Remarques

1)L'expérimentation telle que menée (clientèle restreinte, grille imparfaite, etc.) ne permet pas de dégager d'une façon significative la fréquence d'utilisation des deux approches: partage et mesure.

2)La nature du matériel et des nombres choisis ne donne pas lieu à des "stratégies" et à des actions facilement identifiables.

3)A partir de la 4e année, l'algorithme est acquis et il y a transfert des notions apprises à la situation donnée. Au niveau de la 3e année, quand l'algorithme est en place, il n'y a pas transfert.

4)Dans 61% des cas, la correspondance terme à terme apparaît au premier essai réussi.

5)Dans 74% des cas, le nombre donné est choisi comme diviseur.

6)Après la 1ère année, le nombre d'essais diminue nettement.

D. Conclusions

1)Présenter les assiettes en vrac pour permettre une meilleure observation des actions utilisées.

2)Laisser tomber l'objectif 3) qui était d'établir les étapes de développement, pour trois raisons:

a) on constate que tous les enfants de 4 à 11 ans peuvent arriver à trouver tous les diviseurs d'un nombre donné;
b) il ne semble pas que les étapes qu'on pourrait trouver seraient différences des étapes trouvées dans quatre expériences connues citées par Moelting: rapport, fraction, chance, projection;
c) l'observation des "stratégies" et des actions est plus utile pour l'élaboration d'une unité d'enseignement.

3)Concentrer l'expérimentation aux niveaux 2e, 3e et 4e années parce que les enfants de cet âge permettent des observations plus significatives.

## Etape 3 (février 79)

### A. Objectifs particuliers

1)Dégager la fréquence d'utilisation respective des deux approches de la division: partage - mesure.

2)Découvrir les "stratégies" et les actions utilisées spontanément par les enfants dans la recherche des diviseurs.

3)Chercher le rôle de la correspondance terme à terme.

4)Observer la fréquence du choix du nombre donné comme diviseur.

### B. Expérimentation

Matériel: assiettes et jetons

Nombres: 6 - 5 - 1 - 9 - 12

Clientèle: 18 enfants: 6 en 2e, 6 en 3e, 6 en 4e
Ecole Carillon

Déroulement:

Question: On a des assiettes et des jetons.
On veut distribuer les jetons dans les assiettes.
Combien d'assiettes peux-tu prendre pour être capable de mettre la même chose dans chaque assiette?
Cherche toutes les façons possibles.

Aucune intervention n'est faite au cours de l'expérimentation, sauf la répétition de la dernière phrase, si nécessaire.

Grille d'observation: voir Annexe

C. Résultats

| | partage | mesure | corr.t. à t. au 1er succès | nombre donné comme diviseur | facteurs atteints | succès / essais | Stratégies: hasard | approxi-mation essais-erreurs | prog. linéaire | multi-plication | division | addition |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2e | 0 | 1 | 0.45 | 0.25 | 0.66 | 0.85 | 0 | 0.66 | 0.50 | 0 | 0 | 0 |
| 3e | 0.33 | 1 | 0.33 | 0.54 | 0.81 | 0.90 | 0.16 | 0.50 | 0.50 | 0.16 | 0.16 | 0 |
| 4e | 0.66 | 0.83 | 0.58 | 0.46 | 0.83 | 0.79 | 0 | 0.50 | 0.50 | 0 | 0 | 0 |

TABLEAU 2

Remarques

1) L'expérience semble avoir été faussée par le choix d'une seule école.
On remarque, en effet, une préférence très marquée pour la mesure.

2) Le matériel et le choix des nombres n'apparaissent pas assez riches pour faire apparaître des actions intéressantes.

D. Conclusions

1)Choisir un matériel faisant le moins possible référence à l'idée de nombre, plus stimulant, plus visuel, permettant des actions variées.

2)Choisir des nombres plus grands et avec un plus grand nombre de diviseurs.

3)Travailler avec des enfants de 2e et 3e années dans plus d'une école. Les enfants de 2e et 3e années n'ayant pas encore eu d'enseignement formel sur la division, l'unité d'enseignement pourrait s'adresser aux enfants de ces niveaux.

## Etape 4 (avril 79)

### A. Objectifs particuliers

1)Dégager la fréquence d'utilisation respective des deux approches de la division: partage - mesure.

2)Définir d'une façon précise les actions et les schèmes opératoires utilisés par les enfants dans la recherche des diviseurs d'un nombre et étudier leur pertinence dans l'élaboration de l'unité d'enseignement.

3)Déterminer le matériel le plus approprié à l'observation d'actions variées.

### B. Expérimentation

Matériels: A: tiges sur un support et jetons troués
B: bandes de carton avec unités marquées

Nombres: 30 - 48 - 19 - 27

Clientèle: avec matériel A) 9 enfants de 2e année
9 enfants de 3e année
avec matériel B) 9 enfants de 2e année
9 enfants de 3e année

Ecoles Ste-Famille, St-Joseph, Le Boisjoli. Douze (12) enfants par école.

Déroulement:

Questions: A. Tu dois placer les jetons dans les tiges pour avoir des piles de même hauteur.
Cherche toutes les façons possibles.
B. On te donne une bande de carton. On te demande de la plier sur les lignes rouges. Tu dois faire des morceaux égaux.
Cherche toutes les façons possibles.

Chaque expérimentation avec un enfant se déroule devant deux (2) expérimentateurs.

$C_1$. Résultats avec le matériel A (tiges - jetons)

Taux d'atteinte de chacun des diviseurs avec le matériel A

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 16 | 24 | 30 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 2e | 0.71 | 0.86 | 1.00 | | 1.00 | 0.71 | | 0.71 | | 0.57 | | | 0.29 | |
| | 3e | 0.89 | 0.89 | 0.89 | | 0.56 | 1.00 | | 0.89 | | 0.56 | | | 0.44 | |
| 48 | 2e | 0.63 | 0.75 | 0.50 | 0.63 | | 0.63 | 0.13 | | 0.63 | | 0.38 | 0.63 | | 0.38 |
| | 3e | 0.57 | 0.71 | 0.57 | 0.86 | | 0.57 | 0.86 | | 0.43 | | 1.00 | 0.57 | | 0.43 |

TABLEAU 3

| | Partage | Mesure | Réussite n.de facteurs atteints / n. de facteurs | | | | Efficacité n.de facteurs atteints / n. d'essais (ss répétition) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 30 | 48 | 19 | 30 et 48 | 30 | 48 | 19 | 30 et 48 |
| 2e | 0.16 | 0.84 | 0.70 | 0.49 | 0.75 | 0.58 | 0.49 | 0.79 | 0.18 | 0.68 |
| 3e | 0.20 | 0.80 | 0.76 | 0.70 | 0.50 | 0.72 | 0.70 | 0.82 | 0.12 | 0.72 |
| Moyenne générale | 0.18 | 0.82 | 0.73 | 0.59 | 0.61 | 0.67 | 0.61 | 0.80 | 0.14 | 0.70 |

TABLEAU 4

Remarques

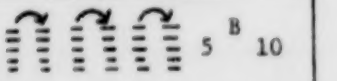
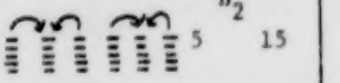
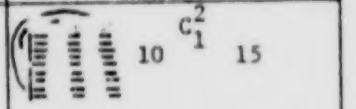
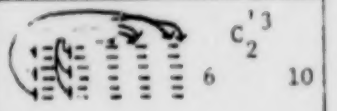
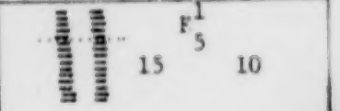
1)16 enfants ont fait le nombre 30; 15 ont fait le nombre 48; 10 ont fait le nombre 19, 3 seulement ont fait le nombre 27. La durée d'expérimentation avec quatre nombres est trop longue. Le nombre 27 n'a pas été retenu dans les résultats.

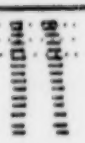
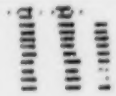
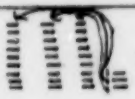
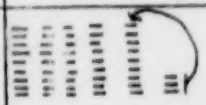
2)Pour 30, les diviseurs les plus atteints sont 2 et 3, le moins atteint est 30.
Pour 48, 2 et 4 sont les plus atteints, 48 le moins atteint.(TABLEAU 3).

3)Le taux de réussite est nettement meilleur en 3e année. (TABLEAU 4).
Les taux d'efficacité sont comparables. Ceci peut s'expliquer par le fait que les enfants de 2e année ont fait moins d'essais pour le nombre 48 et souvent n'ont pas complété leur recherche des diviseurs, évitant ainsi nombre de mauvais essais. Ces enfants se fatiguaient plus tôt et on interrompait leur travail.

4)L'approche mesure est utilisée à 82%; l'approche partage à 18%.

## Description des actions identifiées

| | | |
|---|---|---|
| $A_i$ ⟶ | faire des piles égales de i jetons à partir de l'ensemble des jetons. | |
| $A'_i$ ⇢ | faire des piles égales de i jetons en partant de la situation précédente par une action non clairement identifiable. | |
| A ⇝ | action indéterminée | |
| B | reporter pile sur pile |  |
| $B^{-1}$ | séparer chaque pile en deux | |
| $B_i^{j>2}$ | faire i piles formées chacune de j piles |  |
| $\left(B_i^{j>2}\right)^{-1}$ | séparer chacune des i piles en j piles | |
| $C_i^j$ | séparer i piles en j parties égales et reporter les ij parties sur les ij piles restantes. |  |
| $C_i'^j$ | séparer i piles en j parties égales et reporter les ij parties sur les ij/k piles restantes. |  |
| $E_i^j$ | étêter les piles égales en j tranches de i jetons et former de nouvelles piles dont le nombre de jetons est différent de i. |  |

| | | |
|---|---|---|
| E | étêter les piles égales par tranches variables et former de nouvelles piles |  E 15 10 |
| $E^{-1}$ | | |
| D | égaliser le reste avec une pile et étêter les autres à la même hauteur | 4(non div. de 30) 3 |
| D' | étêter les piles égales pour compléter la pile restante |  11(non div.) 10 |
| D" | distribuer également le reste sur les piles |  9(non div.) 10 |
| D"' | reporter le reste sur une des piles et égaliser les autres piles en utilisant comme référence la pile formée. |  9(non div. de 48) 12 |

Diagrammes des actions pour chaque enfant

avec matériel A.

2e année [30]

1) 5 1 2 8

30(1p) 4 10

3

6

2) 6 4 7 3 4

5 8

9

10

15

3) 1 5 7 15 16 17

2 9

4 10

3

5) 4 5 3 5 7 10 6 9

2

1

4) 2

4

3

6

4p

10(3p)

15(2p)

4p

10(3p)

15(2p)

5(6p)

6) 1 2 4 5 5 7 8 9 11 12

3 10 15(2p)

30(1p)

7) 5 4 3 8

2

1

6

7

3e année 30

10) 1 7 4 6 10 9 8 7 6 5

2

3

11) 1 6 8 15(2p) 3 10(3p)

2 5 30(1p)

4

12) 4 1 3 16 11 9

2 6 10 10

4 15

13) 1

2

4

3

6

10(3p)

15(2p)

30(1p)

14) 2 3 1 10

6 15(2p)

4 30(1p)

8

15) 2 3 1 6 10

4 30

16) 1 3 4 5 6

2 7

17) 15 10 4p 5p 6p 7p 8p

(2p) (3p)

18) 6 4 2 5 13 8 7 1

3 10

12

## 2e année [48]

1)

1 6 11

30(1p) 12

2)

16 5 6

3)

2 5 7 8 9 12 13 15 20

4 16 24

4)

6

12

24(2p)

12(4p)

6)

1 2 3

6

12

24

48

7)

9 1 2

10 3

4

5

8)

3 16(3p) 6 5p 4

2 24(2p) 12

1

4

6

9)

1p

2p

4p

8p

16p

48p

2

3e année 48

11)

| | |
|---|---|
| | 4 |
| | 8 |
| | 16 |
| | 24(2p) |
| | 2 |

12)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 8 | 5 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 16 | | | 15 | | | | |
| 12 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |

13)

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 |
| 4 | | 6 |
| 8 | | 12 |
| 16 | | 24 |
| 48 | | |

14)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 10 |
| | 2 | 6 | |
| | 8 | 12 | |
| | 16 | 24 | |
| | | 48 | |

15)

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 2 | 3 |
| | 1 | 6 |
| | | 5 |
| | | 4 |
| | | 8 |
| | | 7 |
| | | 16 |

16)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2p | 5 | 1 | 2 |
| | 10 | | |
| | 15 | | |
| | 16 | | |
| | 48(1p) | | |

18)

| | |
|---|---|
| 5 | 8 |
| | 16 |
| | 4 |

2e année
3e année

19

4)

4 3 2 5 7 6 7 1 6

5)

4 8 1 3

5 2

6)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 1p

9) 19(1p)

2p

4p

5p

6p

2

1

13)

3 4 5 6(2p) 7(2p) 8 2p) 9(2p) 2 1 6 19(1p)

14)

3 4 5 2 3 1

9

15)

4 5 6 2 3

16)

1 3 4 5 7

2 6 9

19(1p)

17)

3 2 4 5

Utilisation des actions avec le matériel A.

| | N. d'enfants qui ont utilisé l'action | | | N. de fois que l'action a été utilisée | Participation des actions M($\frac{\text{n.f.atteints}}{\text{total de f.}}$) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2e sur 9 | 3e sur 9 | Total sur 18 | pour 30-48-19 | 30 | 48 |
| B | 7 | 8 | 15 | 54 | 0.110 | 0.166 |
| $B^{-1}$ | 5 | 5 | 10 | 17 | 0.023 | 0.073 |
| $B_1^1$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 0.023 | 0.025 |
| $B_{1\neq1}^{j}$ | 2 | 3 | 5 | 5 | 0.008 | 0.020 |
| $(B_1^j)^{-1}$ | 2 | 2 | 4 | 5 | 0.023 | 0.013 |
| TOTAL | | | | | 0.187 | 0.297 |
| $C_1^2$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 0.047 | 0.013 |
| $C_{1\neq1}^{j}$ | 4 | 2 | 6 | 8 | 0.031 | 0.020 |
| $C_1^{j\neq2}$ | 4 | 0 | 4 | 4 | 0.000 | 0.007 |
| TOTAL | | | | | 0.078 | 0.040 |
| D | 2 | 1 | 3 | 3 | 0.023 | 0.000 |
| D' | 0 | 1 | 1 | 1 | 0.008 | 0.000 |
| D" | 7 | 2 | 9 | 16 | 0.047 | 0.027 |
| D"' | 1 | 0 | 1 | 2 | 0.000 | 0.007 |
| TOTAL | | | | | 0.078 | 0.034 |
| $E_1^1$ | 6 | 1 | 7 | 11 | 0.031 | 0.013 |
| $E^{-1}$ | 3 | 0 | 3 | 3 | 0.015 | 0.007 |
| TOTAL | | | | | 0.046 | 0.020 |
| GRAND TOTAL | | | | | 0.389 | 0.391 |

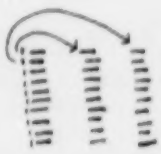
TABLEAU 5

Remarques

1)Il apparaît opportun de distinguer, à l'intérieur des grandes classes B, C, E, certaines sous-catégories d'actions. En effet, si, pour des raisons théoriques, il peut s'avérer souhaitable de regrouper des actions qui du point de vue mathématique (théorique) paraissent analogues, il n'en est pas ainsi en pratique. Ainsi, doubler peut être très différent de tripler ou de quadrupler pour un enfant, correspondre à des schèmes différents (puisqu'à ce stade l'enfant n'est pas prêt à faire des groupements plus avancés d'actions comme mettre ensemble les actions de n-upler). L'analyse des fréquences a conduit à la classification qui apparaît au TABLEAU 5.

2)Les actions définies forment un système fermé pour les inverses. Les actions $E_i^j$ et $C_i^j$ sont théoriquement les inverses les unes des autres. Il est à noter, cependant, que l'enfant n'est pas conscient, lorsqu'il utilise l'une des deux actions, qu'il s'agit d'un inverse. C'est pourquoi il a semblé préférable, pour l'instant, de définir deux actions distinctes, faisant chacune directement référence à l'action même de l'enfant plutôt qu'au lien formel qui existe entre elles. Ainsi, les définitions des actions C mettent l'accent sur le partage des piles tandis que les définitions des actions notées E mettent l'accent sur le fait d'étêter les piles, autrement dit d'enlever des tranches de jetons sur des piles égales.

Exemple:



$C_1^{10}$

$E_1^5 = (C_1^{10})^{-1}$

3) La participation des actions B, C, D, E dans l'atteinte des diviseurs avec le matériel A a été de 39% (TABLEAU 5). Il semble que des techniques d'observation plus adéquates permettraient de diminuer les 61% des cas qui ont été évalués en termes d'actions A, $A_i$ et $A'_i$ .

4) Les enfants font des raisonnements comme ceux-ci:

. 48 aura plus de diviseurs que 30 parce qu'il est plus grand

. 6 ne sera pas diviseur parce que 5 ne l'est pas (pour 48)

. avec 4, il en reste 2; avec 5, il en resterait 1; avec 6, il n'en restera pas (avec 30).

Pour 48, les enfants commencent avec un nombre plus grand que pour 30:

pour 30, 9 enfants sur 16 commencent avec 1 ou 2

pour 48, 4 enfants sur 15 commencent avec 1 ou 2.

## Analyse grossière des schèmes opératoires rencontrés au cours de l'expérimentation.

N.B. - Les termes utilisés dans le texte qui suit: schème, intention, principe, stratégie, modèle, restent à définir d'une façon précise.

Nous constatons dans l'analyse de l'expérimentation en termes d'actions un fort taux (>60%) de passages d'un état à un autre (ou états intermédiaires) qui demeurent inexprimables sous forme d'actions ou sont exprimés par des actions sans trop de signification ($A_i$ et $A'_i$). On peut faire l'hypothèse plausible qu'une meilleure d'observation n'améliorera pas de façon importante les passages en termes d'actions. Au contraire, plusieurs de ces passages semblent motivés par des schèmes plus ou moins simplistes (linéarité, commutativité) ou des "intentions" (ajouter une pile) ou des "processus opératoires" (addition, division) non soutenus par des actions significatives. De là, une autre stratégie d'analyse: développer parallèlement à une banque d'actions (contenant leur stratégie propre), une banque de "schèmes opératoires" (terme impropre allant d'une simple intention à un indice précis) de telle sorte qu'une unité d'apprentissage sur la théorie des nombres viserait non seulement à présenter et à développer certaines actions naturelles mais aussi certains principes généraux sans oublier la correction ou la prévention contre de faux schèmes.

Liste partielle de tels "schèmes" (présumés ou observés)

0. hasard
1. inverser les rôles de jetons et tiges (commutativité)
2. linéarité générale (croissante ou décroissante) de jetons
   - linéarité de nombres pairs
   - linéarité de nombres impairs
   - linéarité

3. linéarité de piles (ajouter ou diminuer d'une pile)
4. stratégies diverses(basées sur l'utilisation du reste)
5. élimination ("j'ai essayé 2, 3, 5; il reste à essayer 4")
6. stratégies arithmétiques:
   addition (10 + 3 pour 30; 4 + 4 pour 48)
   division
   multiplication
7. erreurs de calcul (8 + 15:B)
8. analogie ou transfert ("6 marchait avec 30, je vais essayer avec 48")
9. divers.

Des statistiques en ce domaine sont dangereuses, car il s'agit souvent de présomptions en faveur de schèmes et non d'observations. Voici cependant une interprétation possible du nombre d'apparitions de certains d'entre eux:

| | |
|---|---|
| commutativité | : 9 |
| addition | : 13 |
| multiplication | : 2 |
| division | : 5 |
| linéarité de piles | : 2 |
| stratégies sur le reste | : 2 |
| élimination | : 2 |
| erreurs de calcul | : 3 |
| linéarité | : ~40 |
| linéarité paire | : 2 |
| linéarité impaire | : 1 |

Total : 81

Nombre d'actions exprimées par A, $A_1$ ou $A'_1$ : 160.

Ces statistiques sont partielles et partiales. Elles n'ont d'autre but que d'indiquer une autre piste d'analyse qui à première vue semble prometteuse. Il resterait à étudier plus en profondeur les modèles possibles de façon à avoir une banque en vue des prochaines observations.

Il est à noter que cette démarche d'analyse est à priori plus intéressante lorsqu'on est en présence de nombres à peu de facteurs (où les actions de type B, C, E peuvent être moins utilisées).

## $C_2$ - Résultats avec le matériel B (bandes)

Taux d'atteinte de chacun des diviseurs

avec la matériel B.

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 16 | 24 | 30 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 2e | 0.88 | 1.00 | 1.00 | | 0.88 | 0.75 | | 0.25 | | 0.25 | | | 0.00 | |
| | 3e | 1.00 | 1.00 | 0.89 | | 0.78 | 1.00 | | 0.67 | | 0.67 | | | 0.11 | |
| 48 | 2e | 0.40 | 0.00 | 0.40 | 0.60 | | 0.20 | 0.40 | | 0.40 | | 0.00 | 0.20 | | 0.00 |
| | 3e | 0.80 | 1.00 | 0.40 | 0.80 | | 0.60 | 0.80 | | 0.40 | | 0.40 | 0.60 | | 0.00 |

TABLEAU 6

Taux d'utilisation des

deux approches: partage-mesure

| | Partage | Mesure |
|---|---|---|
| 2e | 0.12 | 0.88 |
| 3e | 0.08 | 0.92 |
| MOYENNE | 0.075 | 0.925 |

TABLEAU 7

Remarques

1) La difficulté de manipulation du matériel des bandes, pour des enfants de 2e et 3e années, prolongeait la durée de l'expérimentation. D'où 17 enfants ont fait le nombre 30, 10 ont fait 48 et 3 seulement se sont rendus à 19.

2) Pour 30, les diviseurs les plus atteints sont 2, 3 et 1, le moins atteint est 30. Pour 48, 4 est le plus atteint, 48 le moins atteint.

3) L'approche mesure est utilisée à 92.5%; l'approche partage à 7.5%. (TABLEAU 7).

Définitions de quelques actions adaptées au matériel B.

B : former un morceau avec deux morceaux.

$B^{-1}$ : séparer chaque morceau en deux.

D"' : ajouter le reste à un morceau et utiliser le morceau formé comme référence.

Diagrammes des actions pour chaque enfant

avec matériel B.

30 2e année

1) 4 5 2 1 6 7 3 9

2) 1 2 5 4 3 7 8 2m(15)

4m

3) 3 2

4) 2m(15) 3 2 6 5 3 1 4 7 9 12

4m

5) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

6) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 20

8

7) 1 5 4 6 7 8 3 2 9

8)

9) 1 3 4 2 5 6 7 8

30 **3e année**

10) 1 2 3 4 6 8 10 7

11) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 13 15(2m) 10 5 15

12) 1 3 4 10 8 9 7
2 6 5

13) 1 3 6 2 5 3m(10) 2m(15) 12 8 4 9

14) 1 2 4 6 8 2m(15)

15) 1 2 4 6 4 5 12 15
3 10

16) 1 2m(15) 5m(6) 2 3 4 5 7 1m(30)

17) 2m(15) 1 2 3 4 5 6

18) 7 3 2 4 5 6 10 1 8 9 11 12 13 17 20

48 **2e année**

1)

2)

3) 2m(24) 3

4m(12)

8m(6)

4)

5) 12 9 11 1 7 4

6) 1 10 30 20 3 4

7) 9 8

8)

9) 8 9 10 4

48 **3e année**

10)

11)

12) 1 2m(24) 2 5 3 8 7 11

4

13)

14) 15 17 8 16 13 9 2 4 6 8 10 12 14 15 18

15) 8 24 2 1 12 4

16) 4 1 2m(24) 2 4 5 6 8

17)

18) 20 2m(24) 2 3 6 5 16 15 1

13ou10

19 2e année

1)

2)

3) 2m 4 3 6 8 1

4) 5 3 2 1 3m

5)

6)

7)

8)

9)

3e année

10)

11)

12)

13) 8 7 6 5 4 3 2 1

14)

15) 1

16) 1 2m 2 3 4 5 1m(19)

17)

18)

Remarques

1) Le matériel B, du moins dans sa forme actuelle, ne se prête pas à l'observation d'actions aussi clairement identifiables que le matériel A. Trois actions ont pu être décrites en parallèle avec les actions trouvées avec le matériel A. Aucune autre action spécifique aux bandes n'a été identifiée.

2) L'analyse du matériel B n'a pas été poussée très loin et n'a pas été complétée, d'une part parce que notre objectif majeur de découvrir des actions et des schèmes opératoires n'a pas été atteint, d'autre part parce que le matériel ne semblait pas stimulant, était difficile et long à manipuler de sorte que les enfants souvent n'ont pas complété leur recherche, n'ont pas fait tous les nombres et n'ont pas fait les mêmes nombres. Aussi, les statistiques sont pratiquement impossibles à établir et les résultats du TABLEAU 6 ont peu de valeur.

Le matériel pourrait éventuellement être transformé pour être plus facile à manipuler, plus stimulant et plus riche de renseignements (par exemple, bandes pointillées avec possibilité de déchirer en morceaux).

Enfin, ce matériel semble plus approprié à l'étude des schèmes opératoires que des actions. De plus, cette expérimentation a pu être utile si l'on tire des conclusions, suite à une analyse sérieuse, sur la comparaison des matériels.

D. Insertion de l'expérimentation sur les diviseurs dans le contexte des groupements (matériel A).

Il est évident que l'activité proposée aux enfants, à savoir de faire des piles égales à partir d'un nombre de jetons, favorise la formation de groupements et que l'on y rencontre soit des fragments de groupements, soit des sous-groupements.

Tout d'abord, le problème posé l'est dans des termes chers à Wittmann qui voit avant tout, dans l'utilisation des groupements, une rationalisation d'une intervention didactique qui soit une démarche d'analyse dynamique soumise ou adoptée par l'apprenant.

En effet, partant d'un état initial (une disposition des n jetons en piles égales) une ou des actions élémentaires se proposent à l'esprit de l'enfant:

"Qu'est-ce qui arrive si:

- je mets une pile sur une autre ...,
- je divise une pile en parties égales que je répartis sur les autres ...
- je prends une ou des tranches de mes piles pour construire d'autres piles ...,

etc.

Le "loading" est ici de conserver l'égalité des piles.

Nous sommes donc en présence d'éléments susceptibles de mener à la formation de groupements. Ainsi, avec 48 jetons, partant de la configuration de 48 piles de 1 jeton, la première action, opération élémentaire de mettre une pile sur une autre, peut mener à la construction des configurations suivantes:

24 piles de 2 jetons
12 piles de 4 jetons
6 piles de 8 jetons
3 piles de 16 jetons

avec, comme opération élémentaire inverse, dédoubler chaque pile.

Le groupement $(\mathcal{A}', \mathcal{T}', \mathcal{C}', \circ)$ est alors formé de:

$\mathcal{A}'$ (états): les 5 configurations précédentes $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$

$\mathcal{C}'$ (opérations élémentaires) $= \left\{ a_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_{i+1} \right\}_{1 \le i \le 4}$ où $a_i$ signifie: "mettre une pile sur une autre ds la configuration $S_i$."

$\mathcal{T}' = \bar{\mathcal{C}}'$, où $\bar{\mathcal{C}}'$ est l'ensemble des morphismes engendrés par $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'^{-1}$

$\circ$ : faire successivement deux morphismes adéquats de $\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'^{-1}$

Nous verrons ainsi la formation de groupements plus ou moins complexes selon la diversité des actions élémentaires utilisées ou la formation de fragments de groupements selon le degré de maîtrise (on peut aussi parler de mobilité ou de stabilité) des opérations élémentaires, de leurs combinaisons et de leurs inverses. Quoi qu'il en soit, nous pouvons, pour des raisons d'ordre théorique, situer tous ces groupements ou fragments de groupements dans le cadre beaucoup plus général que laisse entrevoir notre expérimentation et qui est le suivant:

$\mathcal{G}_n = (\mathcal{A}_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{C}_n, \circ)$ où:

$\mathcal{A}_n$ est constitué des diverses configurations des n jetons en piles égales.

$\mathcal{C}_n$ est constitué des actions $A(A_i, A'_i)$, $B(B_i^j, B, B^{-1}(B_i^j)^{-1})$ $C(C_i^j, C_1^2, \ldots)$, $E(E^{-1}, E_i^j, E'_i, \ldots)$, X, Y, Z, ... et certains composés de ces actions combinés ou pas à des $D(D, D', D'', D''')$.

$\mathcal{I}_n$ est consitué de $\overline{\mathcal{C} \circ \mathcal{C}^{-1}}$

$\circ$ est l'opération qui consiste à abouter deux morphismes adéquats.

le "loading" est: conserver l'égalité des piles.

Remarques:

. Les D(D', D", D"') ne sont pas explicitement des éléments de $\mathcal{C}$ car ils ne partent jamais d'éléments de $\mathcal{A}$. L'alternative aurait été d'étendre $\mathcal{A}_n$ à toutes les configurations possibles, exactes ou non.

. les X, Y, Z sont des actions non encore identifiées ou observées.

. $\mathcal{C}_n$, comme il a été noté précédemment, contient $\mathcal{C}_n^{-1}$, sauf possiblement pour les X, Y, Z, ... mais ne contient pas les unités.

. $(\mathcal{A}_n, \mathcal{I}_n, \mathcal{C}_n, \circ)$ n'est pas un groupement cartésien, car plus d'une action (opération élémentaire) pouvent conduire d'un état à un autre.

. Les groupements ou fragments de groupement effectués par les enfants pour un n donné sont ainsi des sous-groupements ou fragments de groupements de $\mathcal{A}_n$ et sont généralement cartésiens et stricts $\mathcal{A}'_n = (\mathcal{A}'_n, \mathcal{I}'_n, \mathcal{C}'_n, \circ)$ où $\mathcal{A}'_n \subset \mathcal{A}_n$, $\mathcal{C}'_n \subset \mathcal{C}_n$, $\mathcal{I}'_n \subset \overline{\mathcal{C}'_n}$. On pourrait aussi les concevoir comme des unions de sous-groupements (lorsqu'il s'agit de sous-groupements), un pour chaque action distincte.

. Il y aurait peut-être lieu d'introduire la notion de sous-groupement compact lorsque $\mathcal{A}'_n = \mathcal{A}_n$ pour distinguer entre les sous-groupements qui atteignent tous les diviseurs de n et les autres.

. il est évident que $A(A_i, A'_i)$ seule peut suffire à former un sous-groupement compact. C'est d'ailleurs la seule en général, bien que pour des nombres très particuliers, comme $2^n$ ou $3^n$, etc., une seule action peut suffire (ici, B).

Voici quelques exemples de sous-groupements complets possibles (les deux premiers sont théoriques, le dernier provient du travail de l'enfant #11).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | 1 | | | 1 | |
| 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 5 |
| 6 | 10 | 15 | 6 | 10 | 15 | 6 | 10 | 15 |
| | 30 | | | 30 | | | 30 | |
| | $\ell'_{30}$ | | | $\ell'_{30}$ | | | $\ell'_{30}$ | |

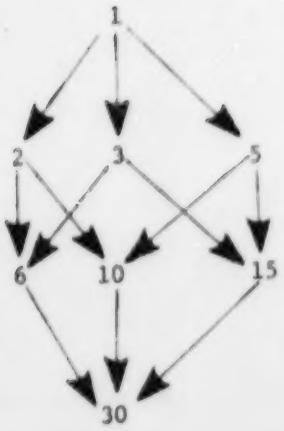
Remarque.

Il est difficile de distinguer entre sous-groupements et fragment de groupements car ceci concerne la formation totale ou partielle du $T'_n$ correspondant. Seul un retour avec les enfants, pour savoir si les actions qu'ils utilisent sont suffisamment intégrés pour qu'ils se déplacent aisément d'un état quelconque à un autre état quelconque parmi les états trouvés, nous permettrait (et encore difficilement) de répondre. Mais nous pouvons espérer, et c'est là le but profond de la future unité d'apprentissage, que la conscientisation des actions utilisées leur permettra d'engendrer, à partir de ce fragment, le sous-groupement correspondant.

Cette formulation générale contient le cas particulier classique suivant (groupement multiplicatif des diviseurs de n):

$(A_n \cdot \ell_n \cdot T_n, \circ)$ où $\ell_n = \{m \to pm\}$ p facteur premier de n, m diviseur de n.

Ainsi, pour 30,




où b.s. = p.p.c.m
b.i. = p.g.c.d.

En effet, les actions concrètes qui conduisent à ce groupement sont:

1

2 3 5

6 10 15

30

Bien qu'en pratique, les enfants utiliseraient un $\mathcal{L}_{30}$ de cardinalité plus faible, comme par exemple:

1

2 3 5

6 10 15

30

L'intérêt de la nouvelle approche véhiculée par cette expérimentation réside dans ce qu'elle permet un très grand nombre d'autres groupements ayant ce même but de trouver et relier les diviseurs d'un nombre. Voici d'ailleurs les fragments ou sous-groupements trouvés par les enfants pour 30 et 48 (deux seulement sont complets), représentés sous cette forme:

1)

2)

3)

4)

5)

6)

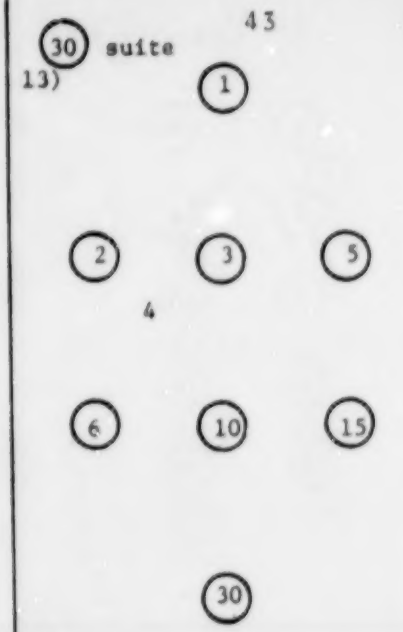
7)

10)

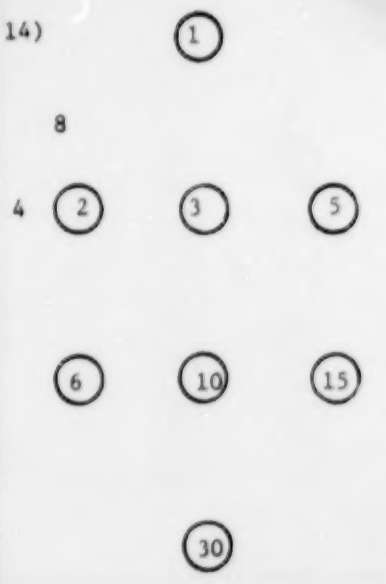
11)

12)

13) (30) suite

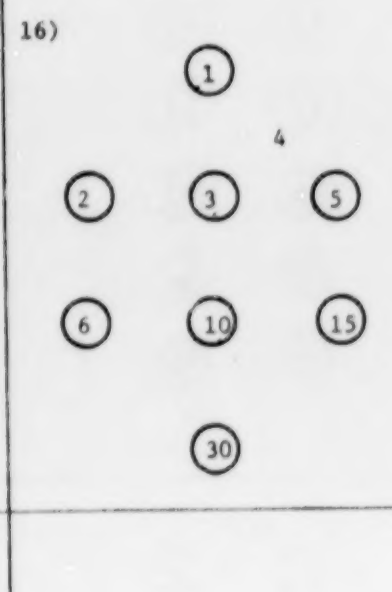



14)

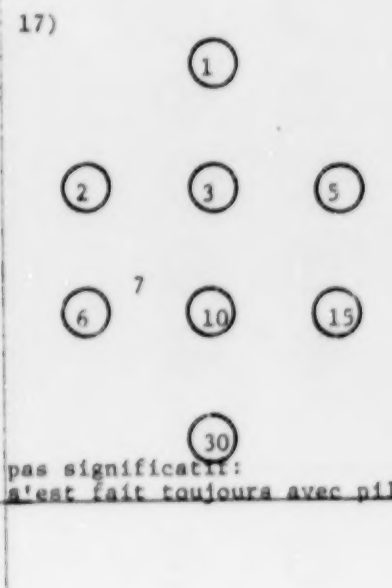



15)

16)




17)

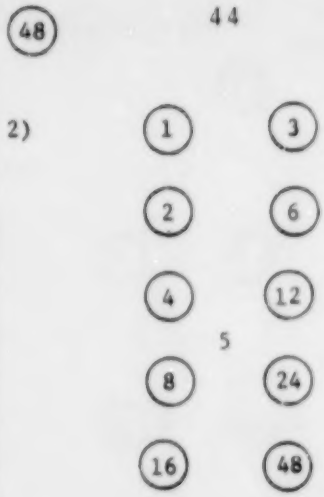



pas significatif:
a'est fait toujours avec piles

18)

1)

2)

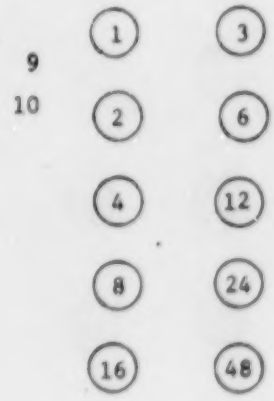



3)

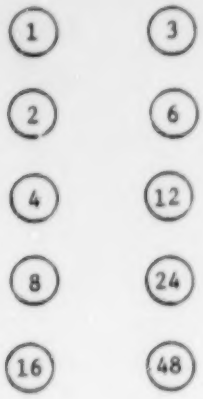
4)

6)

7)

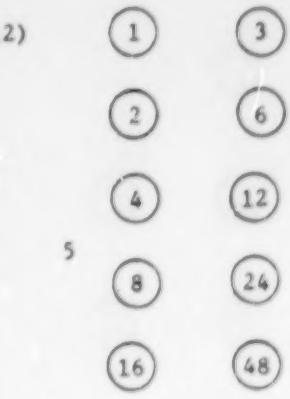



9)




11)

12)

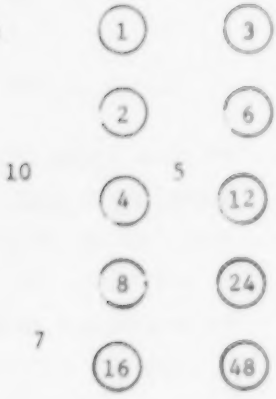


(48) (suite) 45

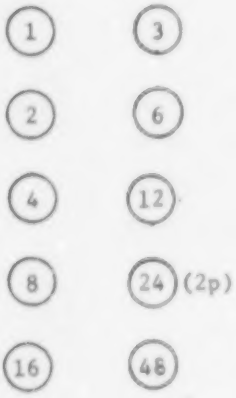
13)

14)

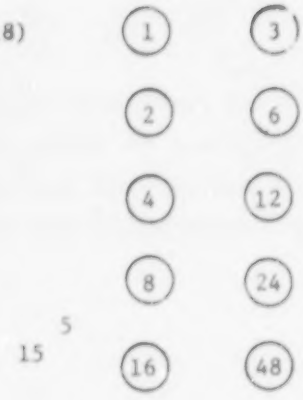
15)




16)




18)



On peut faire l'hypothèse que, là où il y a des flèches noires, il n'y a pas groupements mais fragments de groupements. En effet, il serait étonnant que l'enfant puisse inverser ces flèches noires; et donc il n'y a pas là de mobilité. On ne peut conclure pour autant qu'en l'absence de flèche noire, il y a groupements. La mobilité n'a pas été testée.

Possibilités théoriques d'engendrement des facteurs à partir des autres catégories d'actions.

pour 30

(C)

1

2 3 5

6 10 15

30

Les C seuls ne peuvent atteindre tous les facteurs de 30; le mieux que l'on puisse faire est à gauche où il faut utiliser 2 fois le B.

(D) Le D seul ne peut évidemment pas engendrer tous les facteurs de 30; c'est une action de complément (ou de soutien) qui prend la relève lorsqu'une autre action a échoué. C'est une action qui sort l'enfant de son déséquilibre. C'est un correcteur d'erreurs

(E)

1

2 3 5

6 10 15

30

résultat équivalent au C, puisque les E sont des inverses formels de C.

$E_1^j$ peut toujours être remplacé par $E_j^1$ ou E

pour 48

| (B) | | | (C) | | | (E) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | | 1 | 3 | | 1 | 3 |
| | 2 | 6 | | 2 | 6 | | 2 | 6 |
| | 4 | 12 | | 4 | 12 | | 4 | 12 |
| | 8 | 24 | | 8 | 24 | | 8 | 24 |
| | 16 | 48 | | 16 | 48 | | 16 | 48 |

Remarques 1) Les $C_i^j$ semblent se combiner naturellement à des $\left(B_1^j\right)^{-1}$ et les $E_i^j$ semblent se combiner naturellement à des $B_1^j$

2) Les B seuls peuvent évidemment engendrer tous les facteurs d'un nombre. Mais ça ne semble pas pour les $\left(B_j^i\right.$ et $\left.\left(B_1^j\right)^{-1}\right)$ des actions bien naturelles d'après leur utilisation plutôt rare. Il y a lieu dans une unité d'apprentissage de mettre d'autres moyens à la disposition des enfants.

# E. Analyse théorique de la participation des actions dans l'atteinte des diviseurs

## I Relevé pour les nombres 30 et 48

① actions — B (reporter pile sur pile)
$B^{-1}$ (séparer chaque pile en deux)

analyse théorique

Si n est le nombre total de jetons, on a: $2kh = n$

d'où $kh = \frac{n}{2}$

Donc il y a autant de cas que de diviseurs de $\frac{n}{2}$.

Donc B et $B^{-1}$ n'existent pas pour un nombre impair.

12 cas possibles

-pour 30 (4 cas)

| k | 1 | 3 | 5 | 15 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 15 | 5 | 3 | 1 | | | | |

-pour 48 (8 cas)

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 24 | 12 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 |

② Actions $B_i^j$ (faire i piles, chacune formée de j piles

où $j > 2$ car $B_i^2 = B$ et $j = 1$ non sens)

et $(B_i^j)^{-1}$

analyse théorique

Pour $B_i^j$, on a au départ i x j piles.

Donc $ij \mid n$.

Donc plus un nombre admet de diviseurs où la propriété de fermeture se vérifie, et plus il y aura de cas possibles.

A noter l'existence de 2 classes particulières:

-i = 1: c'est-à-dire tout ramener à une pile;
-ij = n: c'est-à-dire partir de la situation initiale.

42 cas possibles

-pour 30 (15 cas)

$$\left.\begin{array}{ll} \circ\ i = 1 : & B_1^5 \quad B_1^6 \quad B_1^{10} \quad B_1^{15} \quad B_1^3 \\ \circ\ ij = 30 : & B_2^{15} \quad B_3^{10} \quad B_5^6 \quad B_6^5 \quad B_{10}^3 \end{array}\right\} + B_1^{30}$$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ i \neq 1 \\ \quad \text{et} \\ ij \neq 30 \end{array}\right\} : \quad B_2^3 \quad B_2^5 \quad B_3^5 \quad B_5^3$$

-pour 48 (27 cas)

$$\left.\begin{array}{ll} \circ\ i = 1 : & B_1^3 \quad B_1^4 \quad B_1^6 \quad B_1^8 \quad B_1^{12} \quad B_1^{16} \quad B_1^{24} \\ \circ\ ij = 48 : & B_2^{24} \quad B_3^{16} \quad B_4^{12} \quad B_6^8 \quad B_8^6 \quad B_{12}^4 \quad B_{16}^3 \end{array}\right\} + B_1^{48}$$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ i \neq 1 \\ \quad \text{et} \\ ij \neq 48 \end{array}\right\}$ : $B_2^3$ $B_2^4$ $B_2^6$ $B_2^8$ $B_2^{12}$

$B_3^4$ $B_3^8$

$B_4^3$ $B_4^4$ $B_4^6$

$B_6^4$

$B_8^3$

③ Actions $C_i^j$ (séparer i piles en j parties égales, $j \neq 1$, et reporter les parties sur les ij piles restantes)

analyse théorique

nombre de piles au départ : $i + ij$
nombre total de jetons : $(i + ij)\ h = n$
or $h = aj$ (a = # jetons par partie): $(i + ij)\ aj = n$

soit $ij\ (i + j) \mid n$

d'où les différents n possibles en tenant compte des valeurs de j:

| j | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | . . . |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 + j | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | . . . |
| n | m x 6 | m x 12 | m x 20 | m x 30 | m x 42 | . . . |

Les nombres admettant des $C_i^j$ seront donc les multiples des nombres 6, 12, 20, 30, 42 . . .
entre autres, 60 est un nombre privilégié.

A noter l'existence de 2 classes particulières:
-i = 1 (une seule pile est répartie sur celles restantes)
-a = 1 (passage de n à n + 1 jetons: stratégie linéaire).

10 cas possibles

-pour 30 (3 cas)

* i = 1: $C_1^2$
* a = 1: $C_5^2$

$\Big\} + C_1^5$

* i ≠ 1 et a ≠ 1: $\emptyset$

-pour 48 (7 cas)

* i = 1: $C_1^2 \quad C_1^3$
* a = 1: $C_8^2 \quad C_4^3$
* i ≠ 1 et a ≠ 1: $C_2^2 \quad C_4^2 \quad C_2^3$

A noter que $C_1^2$ se retrouve pour 30 et pour 48.

④ Actions $C'^j_i$: cf II

⑤ Actions $E_i^j$ (étêter les piles égales en j tranches de i jetons et former de nouvelles piles dont le nombre de jetons est différent de i).

L'analyse plus précise de ces actions se fera au §III.

Examinons ici le cas particulier ou j = 1: $E_i^1$.

Les $E_i^1$ sont les inverses des $C_i^j$ (voir §II).

Comme pour les $C_i^j$, on retrouve 2 classes particulières:

-celle correspondant aux inverses des $C_1^j$: étêter par une tranche de a jetons et former 1 pile nouvelle;

-celle correspondant à a = 1 (pour $C_i^j$): passage de n + 1 à n jetons (stratégie linéaire).
i.e. i = 1 (pour $E_i^1$) $\longrightarrow$ $E_1^1$

cas possibles

On retrouve évidemment le même nombre que pour les $C_i^j$, bien que certains inverses (des $C_i^j$) soient notés de la même manière:

-pour 30

* former 1 pile nouvelle: $E_5^1$
* passage de n + 1 à n jetons/pile: $E_1^1$ (3 jetons à 2 jetons)

} + $E_1^1$ (passage de 6 jetons à 5 jetons ou de 5 piles à 6 piles).

On voit immédiatement l'ambiguité du $E_1^1$ qui peut recouvrir deux actions différentes (dont les inverses sont différenciés pour les $C_i^j$).

-pour 48

* former 1 pile nouvelle : $E_8^1$ $E_4^1$
* passage de n + 1 à n jetons: $E_1^1$ (3 jetons à 2 jetons); inverse $C_8^2$

  $E_1^1$ (4 jetons à 3 jetons); inverse $C_4^3$
* autres cas

  $E_4^1$

  $E_2^1$ comme inverse de $C_4^2$

  $E_2^1$ comme inverse de $C_2^3$

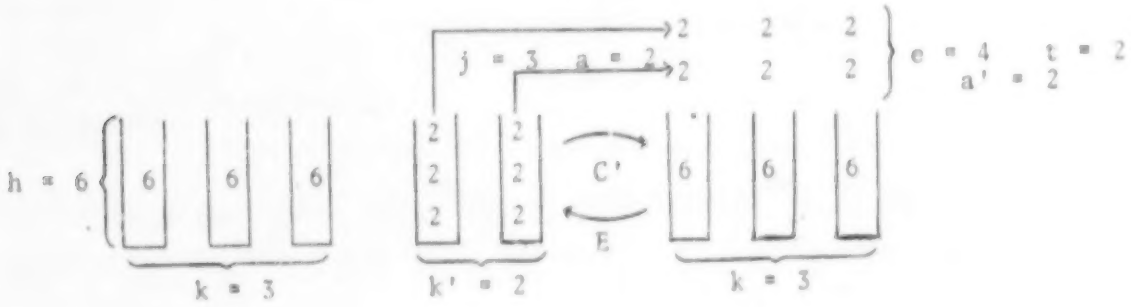
A noter l'importance de $E_1^1$ et aussi le fait que leur description est incomplète.

## II Liens entre les actions $B_i^j$, $C_i^j$, $E_i^j$

### ① Analyse de la situation générale

On peut dire que les actions $B_i^j$, $C_i^j$, $E_i^j$ reviennent à agir sur un certain nombre de piles (k') que l'on reporte (actions $B_i^j$) ou que l'on découpe (actions $C_i^j$) ou que l'on forme (actions $E_i^j$) toujours en tenant compte d'une autre quantité de piles (k).

Examinons les variables qui interviennent à partir d'un exemple:




L'action C' est caractérisée par le passage de k + k' piles à k piles.

L'action E est caractérisée par le passage de k piles à k + k' piles.

pour C' {
- h: hauteur des "k + k'" piles
- j: nombre de parties dans chacune des k' piles
- a: nombre de jetons pa. partie j

pour E {
- t: nombre de tranches
- a': épaisseur d'une tranche
- e: épaisseur totale des tranches

propriétés importantes:

$h = aj$
$k'h = ke = ka't$

et, en tenant compte du fait que $a' = a$ dans le cas présent; la relation $k'aj = ka't$ devient alors: $k'j = kt$.

② Classification générale des actions

Note préliminaire: A moins d'indications contraires, dans ce qui suit, on a toujours $a = a'$ (ce qui est le plus conforme à la réalité).

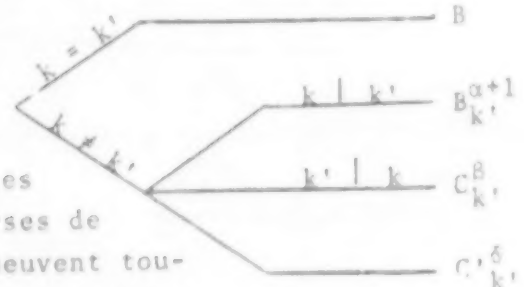
Principe suivi: En tenant compte des relations entre k et k' on retrouve les actions de types B et C, ainsi que les actions E, comme inverses de celles-là.

$k = k'$: une action des plus immédiates est B (il existe d'autres actions possibles, comme on le verra à ⑤).

$k \mid k'$ (et $k' \neq k$): une action des plus immédiates est $B_{k'}^{\alpha+1}$ avec $k' = \alpha k$

$k' \mid k$ (et $k' \neq k$): une action des plus immédiates est $C_{k'}^{\beta}$ avec $k = \beta k'$

$k \nmid k'$, $k' \nmid k$, $k \neq k'$: une action des plus immédiates est $C'^{\delta}_{k'}$




A noter que les actions inverses de ces actions peuvent toutes être classées comme actions de type E (cf ⑤).

## ③ Classification des actions C et C'

On connaît déjà un moyen bien simple de différencier les C des C' puisqu'une action "C" se reconnaît par le fait que:

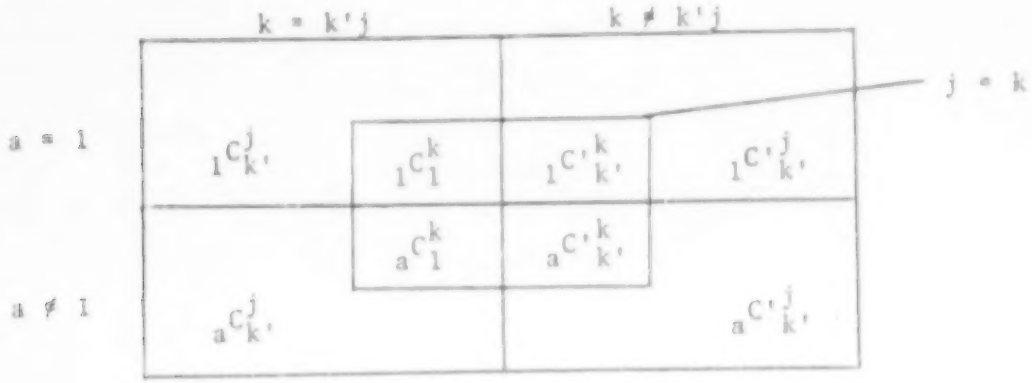
$$k = k'j$$

Mais on peut distinguer deux autres critères, donnant eux aussi une classification intéressante:

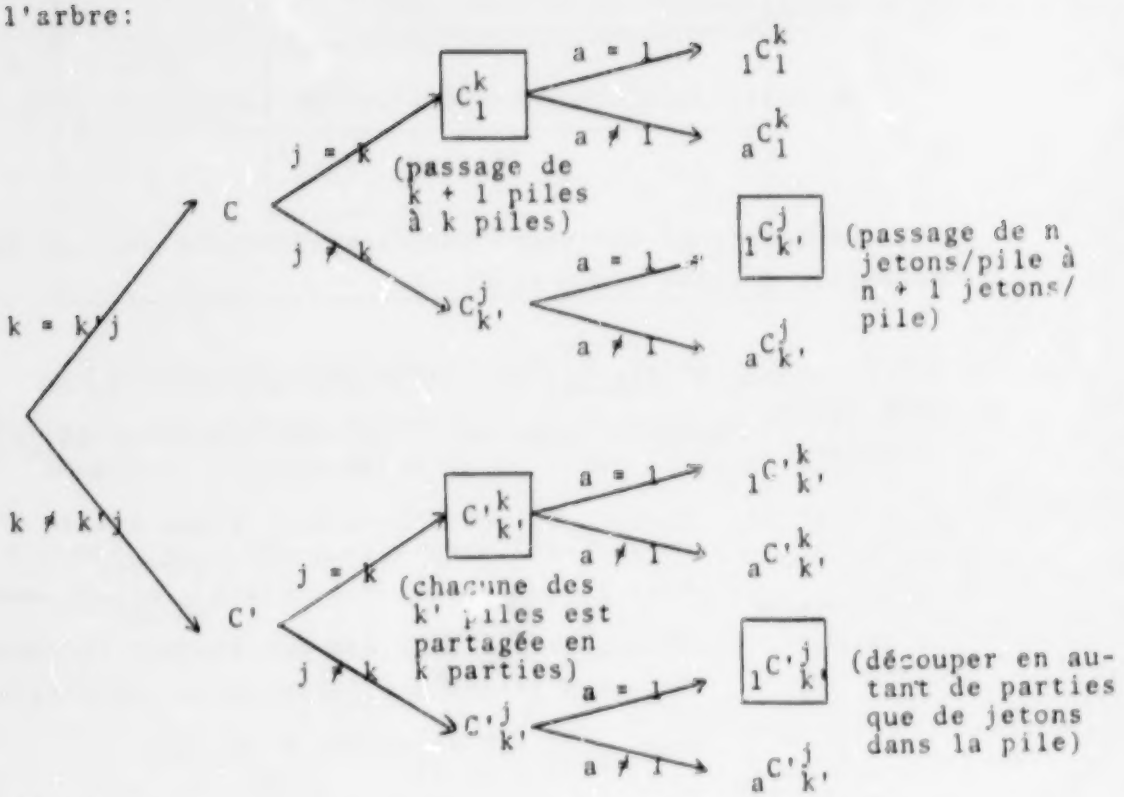
a = 1: c'est-à-dire que dans chacune des k' piles, on fait autant de parties qu'il y a de jetons.
Conséquence importante pour une action C:
passage de n jetons/pile à n + 1 jetons/pile (stratégie linéaire)

j = k: c'est-à-dire que chacune des k' piles est partagée en autant de parties qu'il y a de piles "k".
- c'est une technique à la base de C';
- en outre, pour C, cela revient tout simplement à distribuer une pile sur les autres; c'est donc le passage de k + 1 piles à k piles (stratégie linéaire).

Voici ces différentes possibilités illustrées sur le diagramme suivant, avec l'emploi de 3 indices pour une action C ou C': ${}_aC^j_{k'}$, ${}_aC^j_{k'}$.



avec l'arbre:




On peut ainsi, si on le souhaite, classifier les C et C' en classes disjointes, dont le nombre peut aller de 2 à 8. Signalons les plus importantes:

deux classes: C et C';

trois classes: $C_1^k$, $C_k^j$,, C';

quatre classes: $C_1^k$, ${}_1C_k^j$,, ${}_aC_k^j$,, C'

cinq classes: $C_1^k$, ${}_1C_k^j$,, ${}_aC_k^j$,, $C'^k_k$,, $C'^j_k$,

six classes: $C_1^k$, ${}_1C_k^j$,, ${}_aC_k^j$,, $\left|\begin{matrix} C'^k_k,, {}_1C'^j_k,, {}_aC'^j_k, \\ \text{ou} \\ {}_1C'^k_k,, {}_aC'^k_k,, C'^j_k, \end{matrix}\right.$

## ④ Classification des actions ${}_{k'}E_t^{a'}$

On voit immédiatement que l'action inverse de ${}_aC'^{\,t}_{\,k'}$ est ${}_{k'}E_t^a$.

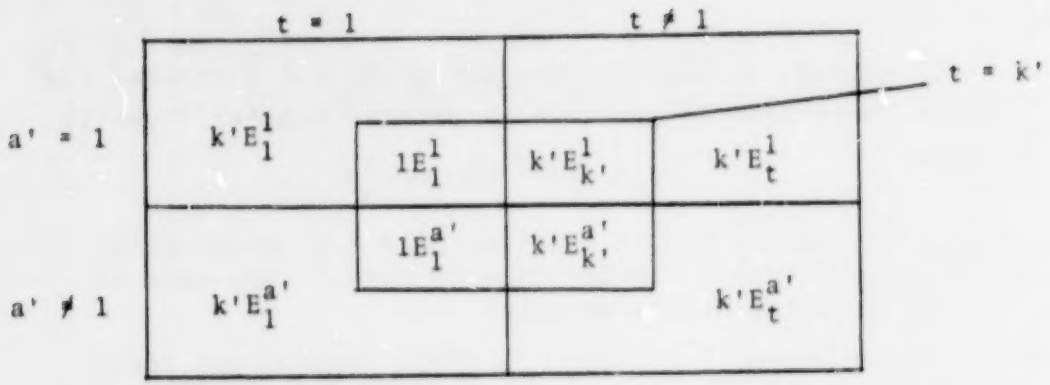
Donc on peut envisager une classification des actions E semblable à celle des C et C':

$t = 1$ (une seule tranche) : alors $\boxed{{}_{k'}E_1^a}$ est l'inverse d'une action C.
Exemple (pour 48): ${}_2E_1^4$ est l'inverse de ${}_4C_2^2$.

$a' = 1$ (= a): (faire des tranches de 1 jeton) alors ${}_{k'}E_t^1$ est l'inverse: d'une action C' (où a = 1).
Mais si en outre t = 1, alors $\boxed{{}_{k'}E_1^1}$ est une action bien particulière qui traduit le passage de n + 1 jetons à n jetons/pile (stratégie linéaire).
Donc ${}_{k'}E_1^1$ est l'inverse d'un ${}_1C_{k'}^j$.
Exemple (pour 30): ${}_5E_1^1$ est l'inverse de ${}_1C_5^2$.

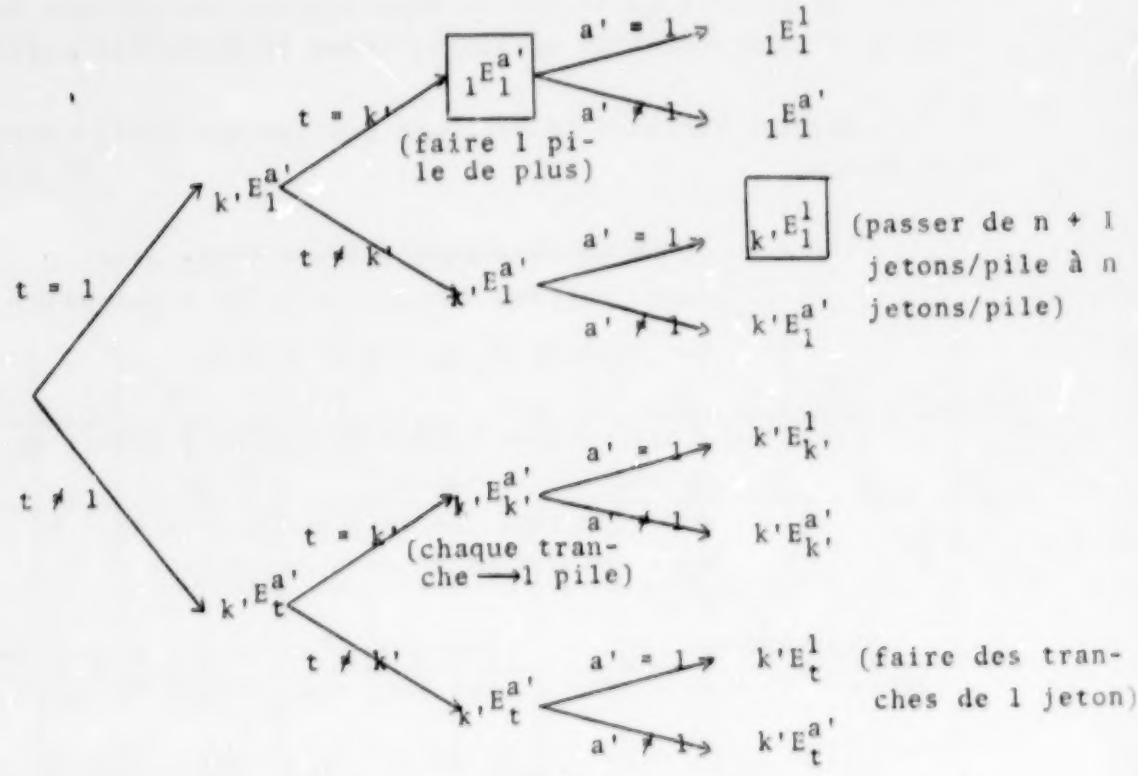
$t = k'$ (chaque tranche forme 1 pile nouvelle) : alors ${}_{k'}E_{k'}^a$, est l'inverse d'une action C' (ou j = k).
Mais si en outre t = 1 alors $\boxed{{}_1E_1^a}$ est une action qui traduit le fait d'étêter pour avoir <u>une</u> pile de plus (stratégie linéaire pour les piles):
Donc ${}_1E_1^a$ est l'inverse d'un ${}_aC_1^k$.
Exemple (pour 48): ${}_1E_1^8$ est l'inverse de ${}_8C_1^2$.

On retrouve ainsi un tableau semblable au précédent (pour C et C').




Note: On ne tient pas compte ici de l'action E générale, ni de la restriction apportée à la définition des $E_i^j$ qui empêchait de considérer un $E_i^j$ comme inverse de $B_i^j$.

avec l'arbre (correspondant à celui des C et C′):



Là encore, on pourrait considérer de 2 à 8 classes disjointes, mais dans la pratique on peut se limiter à quatre classes:

$_{k'}E_1^1$: passer de n + 1 jetons/pile à n jetons/pile;

$_1E_1^{a'}$: faire 1 pile de plus;

$_{k'}E_1^{a\neq 1}$: étêter par 1 seule tranche de a jetons;

$_{k'}E_{t\neq 1}^{a'}$: étêter par plusieurs tranches.

⑤ Tableaux de répartition des actions

En tenant compte des relations entre k et k', il est possible de faire figurer sur un même tableau les actions de types B, C, C' ainsi que les actions E comme inverses des précédentes.

Sur les tableaux ne figurent pas les cas particuliers suivants:

* k = 1 (c'est-à-dire tout ramener à une pile)
  ceci comprend une action B (si n est pair) et les actions $B_1^j$ ($j \mid n$ et $j \neq 2$);

* kj = n (c'est-à-dire former des piles à partir de la situation initiale)
  ceci comprend les actions $B_k^j$ avec $kj = n$, dont une action B (si n est pair).

Dans chaque cas, ne figure que l'action la plus plausible (parfois il y en a plus d'une) pour les actions de types B et C.

Pour chaque C et chaque C' il existe une action E correspondante (c'est l'inverse):

$$a',C'^{j}_{k'} \xleftarrow{\text{inverse}} k',E^{a'}_{t}$$

$$a',C^{j}_{k} \xleftarrow{\text{inverse}} k',E^{a'}_{1}$$

De même $(B^{j}_{k})^{-1}$ peut être assimilé à l'action $k(j-1)E^{n/kj}_{j-1}$.

Quant aux actions moins plausibles; à chaque action plausible il en correspond une classe:

à B correspond la classe des $C'^{j'}_{k}$ où $j' \mid h$

à $B^{j}_{k}$ correspond la classe des $C'^{j'}_{(j-1)k}$ où $j' \mid h$

} n'ont pas été figurées car actions peu probables

à $C^{j}_{k}$, correspond la classe des $C'^{j'}_{k}$, où j't.q. $j' \mid h$ et $j' = \delta j$

à $C'^{j}_{k}$, correspond la classe des $C'^{j'}_{k}$, où j't.q. $j' \mid h$ et $k'j' = \zeta k$ $j' \neq 1$

I pour 30

Tableau des actions principales

| k \ k' | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $5C^{2}_{1}$ | | $3C'^{2}_{3}$ | $B^{3}_{2}$ | | | | $B^{5}_{2}$ | | | | | $1C'^{2}_{3}$ |
| 3 | | $2C'^{3}_{2}$ | B | | | | $1C'^{3}_{7}$ | | | | | $B^{5}_{3}$ | |
| 5 | $1C^{5}_{1}$ | | | | B | | | | | $B^{3}_{5}$ | | | |
| 6 | | | | $1C'^{3}_{4}$ | | | | | $1C'^{2}_{9}$ | | | | |
| 10 | | | | | $1C^{2}_{5}$ | | | | | | | | |

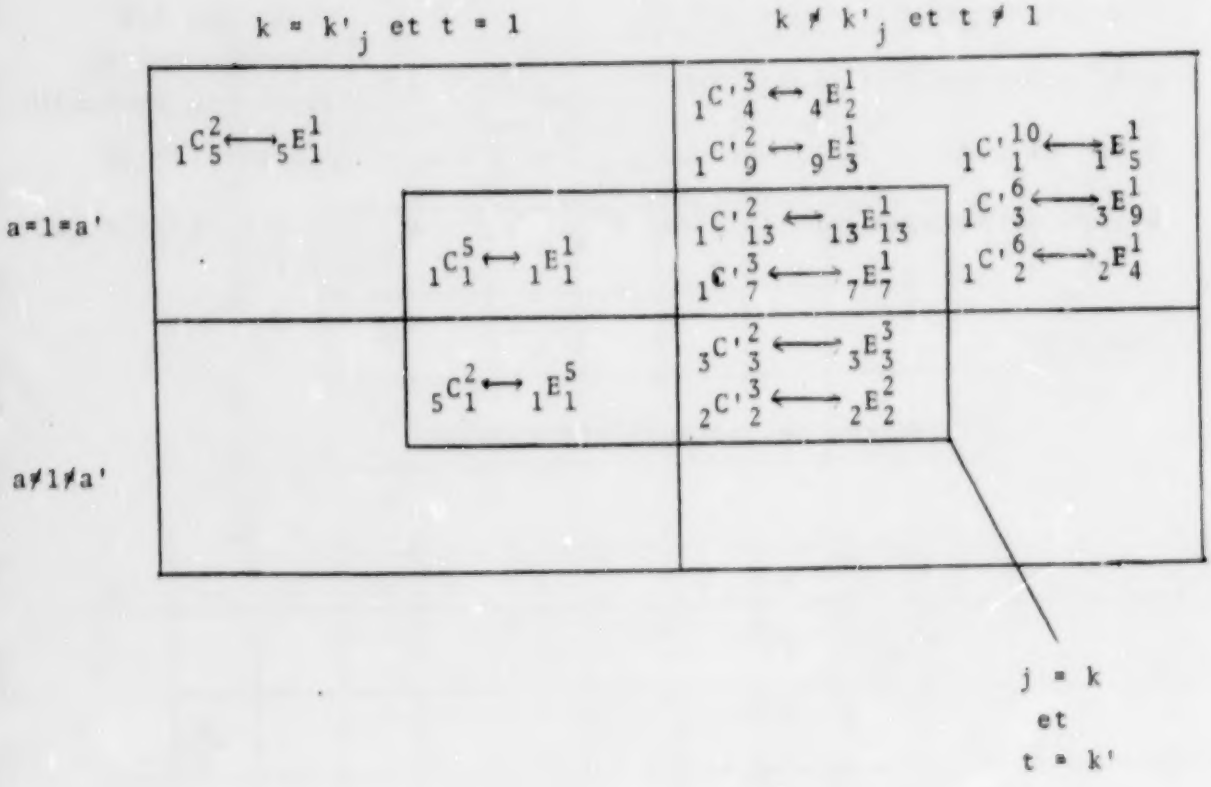
Autres actions réalisables:

$_1C'^{10}_1$ (à partir de $_5C^2_1$)

$_1C'^{6}_3$ (à partir de $_3C'^{2}_3$)

$_1C'^{6}_2$ (à partir de $_2C'^{3}_2$)

Répartition sur le diagramme des actions C, C', E:




A partir de ce diagramme, on peut séparer les actions de type C - C' et celles de type E, en classes disjointes, dont le nombre peut varier de 2 à 8.

pour 48

Tableau des actions principales

| k \ k' | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | ${}_8C_1^2$ | B | | $B_2^3$ | | $B_2^4$ | | | $B_2^6$ | | | $B_2^8$ | | | | | $B_2^{12}$ |
| 3 | ${}_4C_1^3$ | | B | | ${}_2C'^3_5$ | | | $B_3^4$ | | | ${}_1C'^3_{13}$ | | | | | $B_3^8$ | |
| 4 | ou ${}_4C_2^2$ / ${}_2C'^4_2$ | | | B | | | $B_4^3$ | | | $B_4^4$ | | | | | $B_4^6$ | | |
| 6 | ou ${}_2C_2^3$ / ${}_1C'^6_2$ | | | | | B | | | ${}_1C'^3_{10}$ | | | | | $B_6^4$ | | | |
| 8 | | | | ${}_2C_4^2$ | | | B | | | | | | $B_8^3$ | | | | |
| 12 | | | | ${}_1C_4^3$ | | | | | | B | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | ${}_1C_8^2$ | | | | | | | | | | |

Autres actions possibles (à partir de C et C')

${}_8C_1^2 \longrightarrow {}_4C'^4_1$ ${}_2C'^8_1$ ${}_1C'^{16}_1$

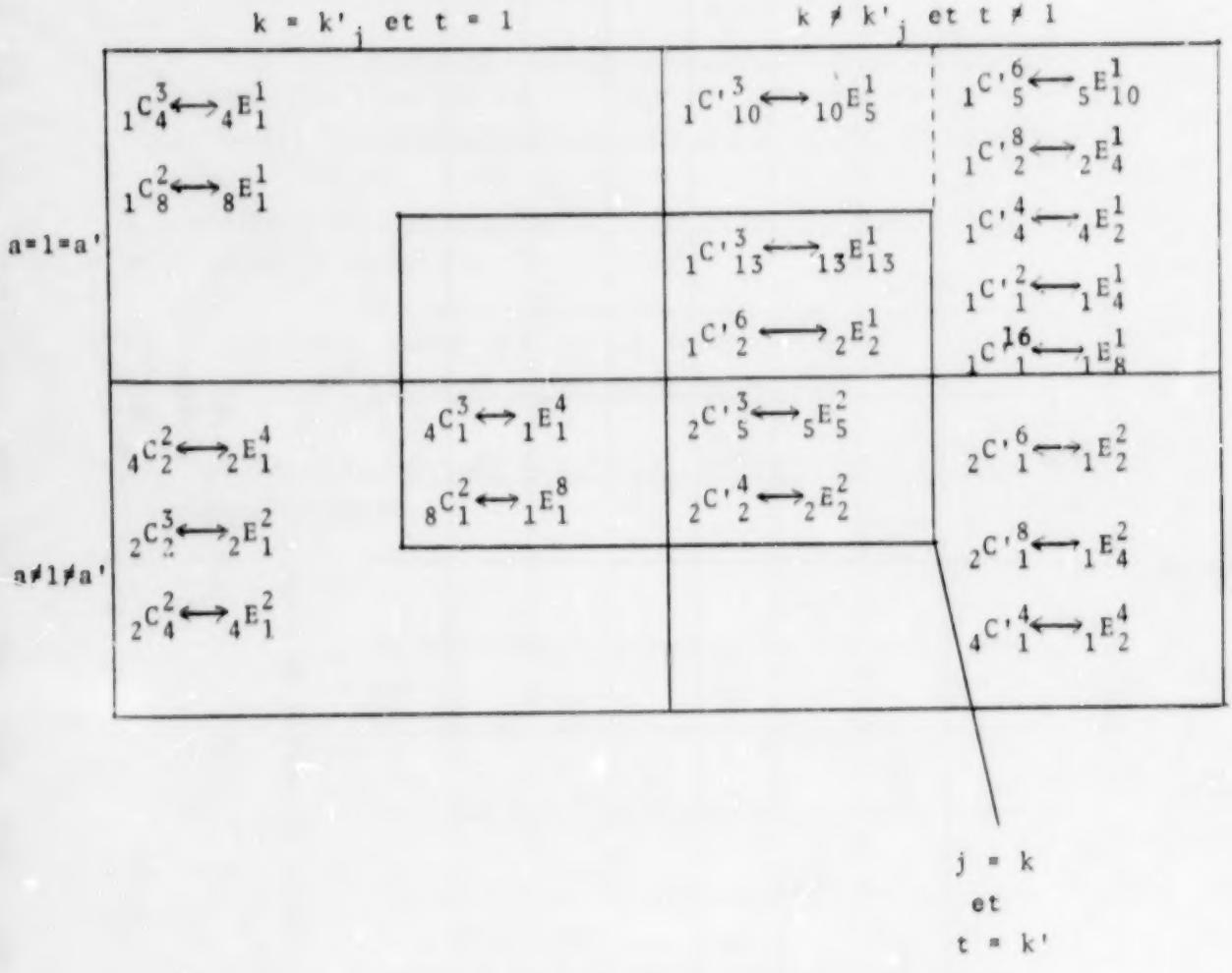
${}_4C_1^3 \longrightarrow {}_2C'^6_1$ ${}_1C'^{12}_1$

${}_2C'^3_5 \longrightarrow {}_1C'^6_5$

${}_4C'^4_2 \longrightarrow {}_1C'^8_2$

${}_2C_4^2 \longrightarrow {}_1C'^4_4$

Répartition sur le diagramme des actions C, C' et E



## III Remarques

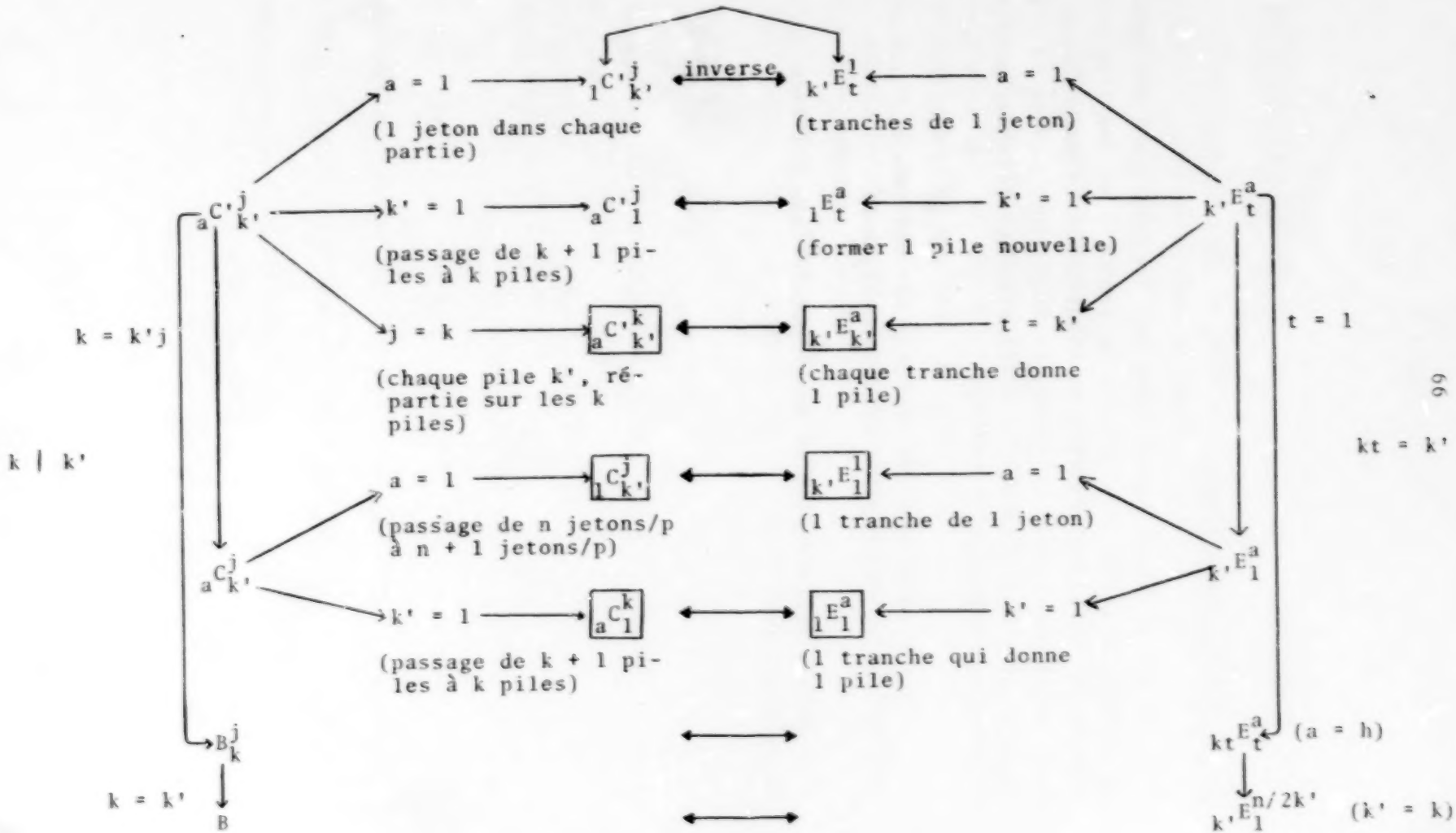
### ① au niveau des actions

Il est à retenir que toutes les actions (sauf D)) peuvent se définir à partir des actions de type C', et que l'on peut déterminer plusieurs catégories significatives pour chaque type d'actions. Pour ce faire, il faut tenir compte de 3 variables pour les actions C', aussi bien que pour les actions E (d'où la notation à 3 indices).

A noter aussi que les inverses des actions C, C', B peuvent toutes se noter comme actions de type E.

On peut résumer toutes ces constatations à l'aide du tableau suivant.

## Catégories particulières (non disjointes)



② au niveau des nombres

On a constaté que, en général, plus un nombre admet de facteurs et plus il y aura de types d'actions B, C, C' ou E possibles.

On peut aussi mentionner les principes suivants:

* si n est impair: aucune action B possible;
* si n n'est pas multiple des nombres de la forme (m x (m + 1)): aucune action $C_k^j$ possible (ni $E_1^{a'}$).

Analysons en conséquence deux nombres très différents selon ces principes;

· un nombre "pauvre" en actions: 45
un nombre "riche" en actions : 60

a) pour 45

-tableau des actions principales (pour B, C, C')

| k \ k' | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | ${}_3C'^3_2$ | | $B^3_3$ | | $B^5_3$ |
| 5 | | ${}_1C'^5_4$ | | $B^3_5$ | |
| 9 | | | ${}_1C'^2_9$ | | |

-actions de type E: ${}_3C'^3_2 \longrightarrow {}_2E^3_2$ ${}_1C'^5_4 \longrightarrow {}_4E^1_4$ ${}_1C'^3_6 \longrightarrow {}_6E^1_2$

-autres actions moins plausibles: ${}_3C'^3_2 \longrightarrow {}_1C'^9_2$ $(\longleftrightarrow {}_2E^1_6)$

-constatations: *aucune action B
*aucune action C
*trois actions $B_k^j$ propres ( + $B_3^{15}$, $B_5^9$, $B_{15}^3$ et $B_1^3$, $B_1^5$, $B_1^9$, $B_1^{15}$, $B_1^{45}$).

b) pour 60

Tableau des actions principales

| k \ k' | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $10C_1^2$ | B | $6C'^{2}_{3}$ | $B_2^3$ | | | | $B_2^5$ | | $B_2^6$ | | | $2C'^{2}_{13}$ | | | | | $B_2^{10}$ | | | | | | $B_2^{15}$ |
| 3 | $5C_1^3$ | $4C'^{3}_{2}$ | B | | | | $2C'^{3}_{7}$ | | $B_3^4$ | | | $B_3^5$ | | | | | $1C'^{3}_{17}$ | | | | | | $B_3^{10}$ | |
| 4 | $3C_1^4$ | $5C_2^2$ | | | | $1C'^{6}_{6}$ | | $B_4^3$ | | | $1C'^{4}_{11}$ | | | | | $B_4^5$ | | | | | | $1C'^{2}_{26}$ | | |
| 5 | $2C_1^5$ | | | | B | | $1C'^{5}_{7}$ | | | $B_5^3$ | | | | | $B_5^4$ | | | | | | $B_5^6$ | | | |
| 6 | | | | $1C'^{6}_{4}$ | | B | | | $1C'^{4}_{9}$ | | | | | $1C'^{3}_{14}$ | | | | | | $B_6^5$ | | | | |
| 10 | | $1C_2^5$ | | | $2C_5^2$ | | | | | B | | | | | | | | | $B_{10}^3$ | | | | | |
| 12 | | | $1C_3^4$ | | | | | $1C'^{3}_{8}$ | | | | | | | | | | $1C'^{2}_{18}$ | | | | | | |
| 15 | | | | | $1C_5^3$ | | | | | | | | | | B | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | $1C_{10}^2$ | | | | | | | | | | | | | | |

Autres actions possibles engendrées par les C et C':

$10C_1^2 \rightarrow 5C'^{4}_{1}, 2C'^{10}_{1}, 1C'^{20}_{1}$

$5C_1^3 \rightarrow 1C'^{15}_{1}$

$3C_1^4 \rightarrow 1C'^{12}_{1}$

$2C_1^5 \rightarrow 1C'^{10}_{1}$

$5C_2^2 \rightarrow 1C'^{10}_{2}$

$2C_5^2 \rightarrow 1C'^{4}_{5}$

$6C'^{2}_{3} \rightarrow 3C'^{4}_{3}, 2C'^{6}_{3}, 1C'^{12}_{3}$

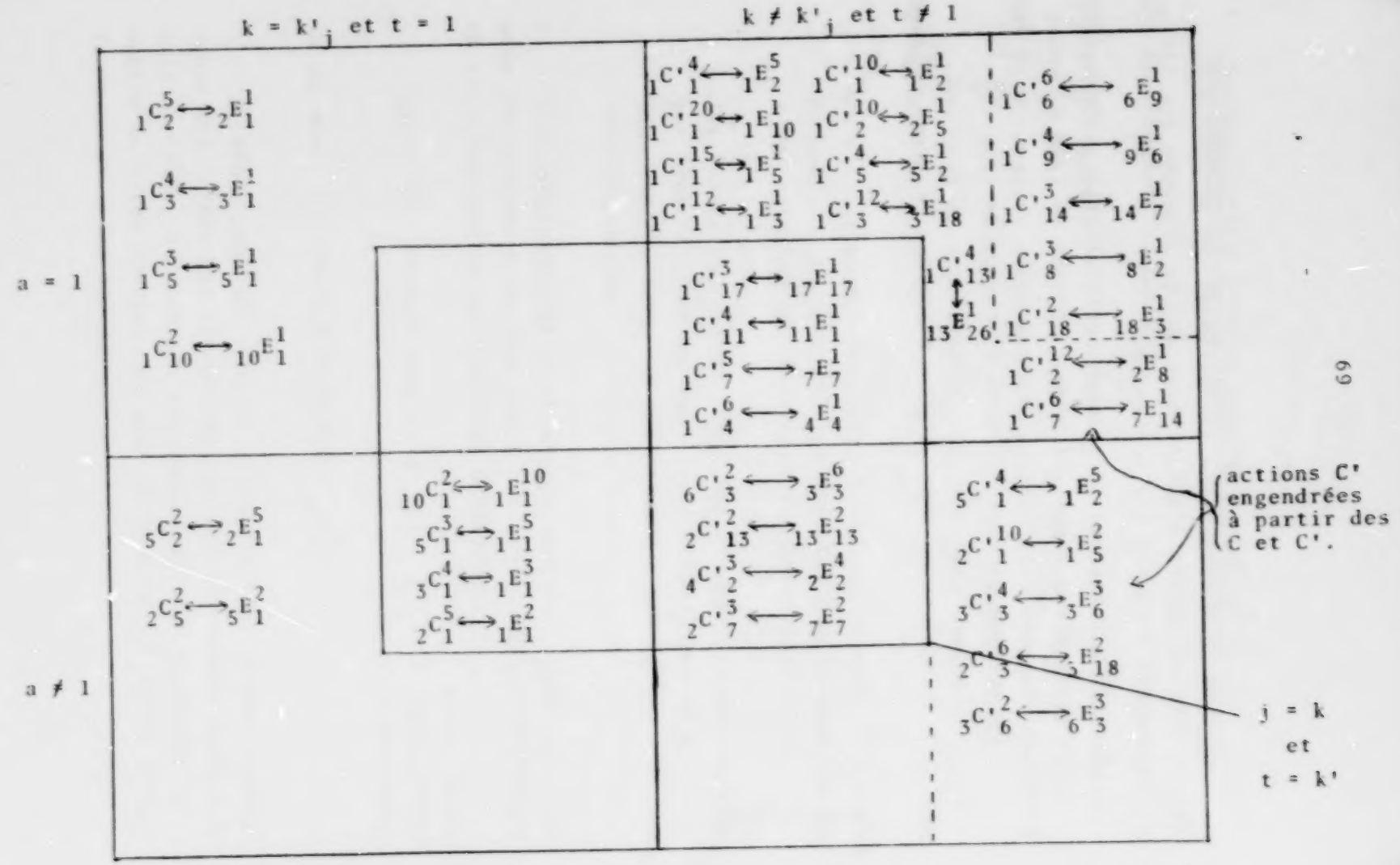
$2C'^{2}_{13} \rightarrow 1C'^{4}_{13}$

$4C'^{3}_{2} \rightarrow 2C'^{6}_{2}, 1C'^{12}_{2}$

$2C'^{3}_{7} \rightarrow 1C'^{6}_{7}$

$1C'^{6}_{6} \rightarrow 3C'^{2}_{6}$

Diagramme de classification (pour les C, C', E) pour 60.



On voit très bien ainsi la "richesse" en actions qui existe pour ce nombre d'autant plus que ne figurent pas les C' engendrées à partir des actions B.

A noter l'existence de classes particulières intéressantes.

pour C $\left\{\begin{array}{l} \text{4 actions de type } {}_1C^j_{k'} \longleftrightarrow \text{4 actions de type } E^1_1 \\ \text{4 actions de type } C^j_1 \longleftrightarrow \text{4 actions de type } {}_1E^{a'}_1 \end{array}\right\}$ pour E

pour C': 8 actions de type ${}_aC'^k_{k'} \longleftrightarrow$ 8 actions de type ${}_k,E^{a'}_{k'}$ (pour E).

## IV Recommandations pour la prochaine expérience

### ① au niveau des actions

• Il pourrait être intéressant de ramener toutes les actions de type B, C ou C' aux actions de type C'. Les $C^j_{k'}$, $B^j_k$ et B seraient alors des cas particuliers des actions C'.

Mais est-ce souhaitable? On peut dire que non, et ceci pour 2 raisons:

-on n'a pas ou peu rencontré d'actions de type C' jusqu'à présent. Donc il n'est pas très logique de tout ramener à une notation qui ne semble pas nécessaire.

-les cas particuliers: $C^j_{k'}$, $B^j_k$, B sont intéressants de par leur notation et font immédiatement penser à l'action sous-jacente, ce qui ne serait pas le cas avec une notation unique.

• Vu l'importance de la stratégie linéaire, reconnaissable pour les actions C au fait que a = 1, on suggère d'introduire un troisième indice pour ce type d'actions

ainsi $C^j_i$ devrait être noté ${}_aC^j_{k'}$ $\begin{cases} k': & \text{\# piles découpées} \\ j: & \text{\# parties/pile} \\ a: & \text{\# jetons/partie} \end{cases}$

et de même $C'^j_i$ devrait être noté ${}_aC'^j_{k'}$.

• De même, pour les actions de type E, une classe intéressante est formée par les actions où chaque tranche forme une pile nouvelle; et comme il est souhaitable de connaître le nombre de piles formées, on peut introduire un nouvel indice fournissant cette indication.

Il est conseillé en outre d'intervertir les indices de l'ancienne notation pour rester conforme aux autres notations

ainsi $E_i^j$ devrait se noter $_{k'}E_t^a$ { t: # tranches ; a: épaisseur d'une tranche ; k': # piles nouvelles formées

• Toujours en ce qui concerne les notations, pour éviter toute ambiguité,

$B_i^j$ devrait se noter $B_k^p$ (k piles, chacune formée de p piles).

• Il est remarquable de constater aussi que les types d'actions concrètement rencontrés sont confirmés dans leur existence par l'analyse théorique.

En outre, vue cette analyse, il est fort peu probable de rencontrer de nouveaux types d'actions.

A titre d'exemple, on peut déjà présenter les actions qui seront les plus probables pour le nombre 60. Cette liste n'est pas exhaustive bien entendu. Dans le tableau ci-dessous, on indique pour chaque nombre possible de piles au départ, les actions les plus plausibles, par ordre décroissant.

| # piles au départ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① ⟶ | $B$ | $_{10}C_1^2$ | $B$ | $B^{-1}$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B^{-1}$ | $B$ | $B$ | $B$ |
| ② ⟶ | $B^{-1}$ | $_1E_1^5$ | $_5C_1^3$ | $_3C_1^4$ | $B^{-1}$ | $B^{-1}$ | $_1C_2^5$ | $_1C_3^4$ | $_1C_5^3$ | $B^{-1}$ | $B_3^{20}$ |
| ③ ⟶ | $_1E_1^{10}$ | | $_1E_1^3$ | $_6C'^2_3$ | $B_2^3$ | $_1C'^6_4$ | $_1C'^5_7$ | $B_5^3$ | $_1C'^3_{17}$ | $_1C_{10}^2$ | |
| | | | | $_4C'^3_2$ | $_5C_2^2$ | $B_2^5$ | $_3E_1^1$ | $_1C'^4_{11}$ | $_{10}E_1^1$ | $B_{10}^3$ | |
| | | | | $_1E_1^2$ | $_4E_4^1$ | $_2E_1^1$ | | $_5E_1^1$ | | | |

② au niveau des nombres choisis

Si on veut un nombre admettant le plus d'actions possibles, il doit remplir les conditions suivantes:

-être pair (pour que les B soient possibles);

-admettre des diviseurs où la propriété de fermeture se trouve vérifiée en grande partie (pour l'existence des $B_k^p$);

-être un multiple des nombres de la forme m (m + 1): pour l'existence des actions C, C' et E.

En outre le nombre doit être assez grand pour éviter que les enfants n'en connaissent automatiquement les diviseurs.

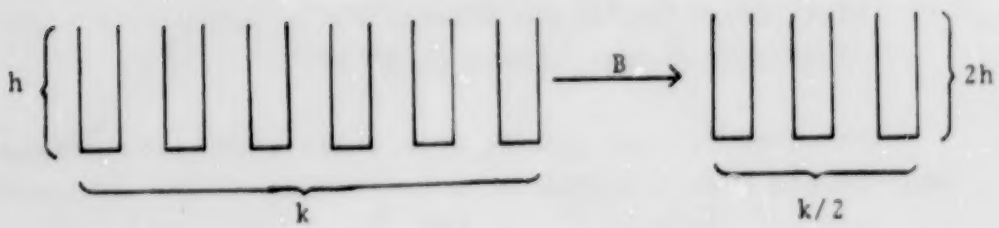
Il s'en suit que le nombre 60 est tout indiqué.

On peut également garder le nombre 48 déjà très riche en actions.

## F. Propriétés arithmétiques et implications pédagogiques reliées à chaque action (matériel A).

---

I Action B (reporter pile sur pile)




$$n = kh$$
$$= (\alpha \times 2)\, h \quad \text{(parité de k)}$$
$$= \alpha\,(2h) \quad \text{(associativité)}$$

Action $B^{-1}$ (séparer chaque pile en deux)

$$n = kh$$
$$= k\,(2\beta) \quad \text{(parité de h)}$$
$$= (k \times 2)\,\beta \quad \text{(associativité)}$$

Conditions d'application

a) en fonction du matériel:
que l'enfant reconnaisse la parité du nombre de piles (action B) ou la parité du nombre de jetons par pile (action $B^{-1}$);

b) en fonction du calcul numérique:
que l'enfant décompose le nombre pair en produit de la forme 2n et applique l'associativité de la multiplication ou que l'enfant applique le principe: un produit reste invariant si on divise l'un des facteurs et multiplie l'autre facteur par le même nombre (ici 2).

Exemple

1) $30 = 6 \times 5$
$= (3 \times 2) \times 5$
$= 3 \times (2 \times 5)$
$= 3 \times 10$

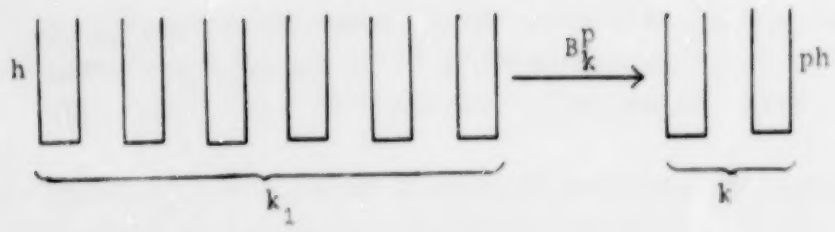
ou 2) $30 = 6 \times 5$
$= \frac{6}{2} \times (5 \times 2)$
$= 3 \times 10$

Remarques

i. En fonction du matériel, on peut dire en 1) que 3 est associé tantôt aux piles tantôt aux jetons (ou à la hauteur des piles).

ii. Il est intéressant de remarquer que le principe utilisé en 2) est également applicable aux fractions équivalentes.

II Actions $B_k^{p>2}$ (faire k piles, chacune formée de p piles)




$n = k_1 h$
$= (kp)\ h$ (décomposition de k, en produi
$= k\ (ph)$ (associativité)

Actions $\left(B_k^{p>2}\right)^{-1}$ (séparer chacune des k piles en p piles)

$n = kh$
$= k\ (p\alpha)$ (décomposition de h, en produi
$= (kp)\ \alpha$ (associativité)

Conditions d'application

a) en fonction du matériel:
que l'enfant sache répartir en parties égales les piles (dans le cas de $B_k^p$) ou les jetons de chaque pile (dans le cas de $(B_k^p)^{-1}$).

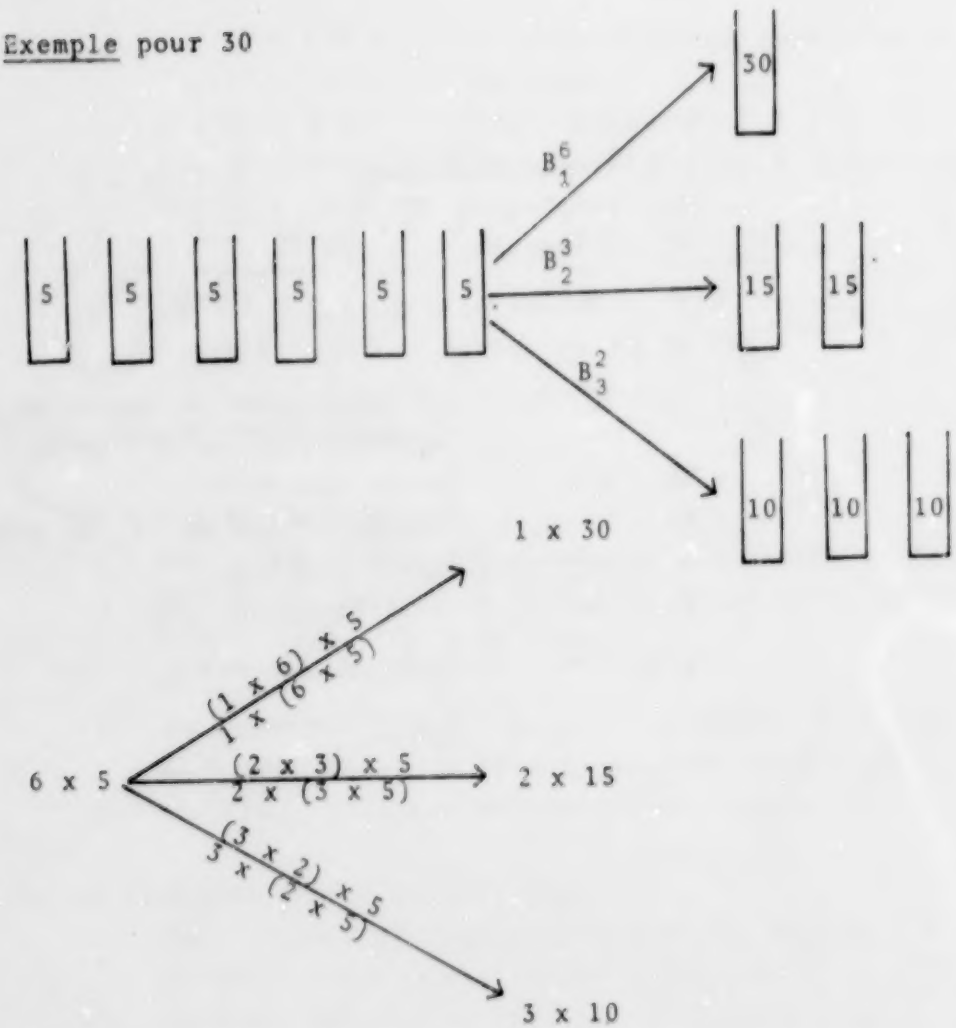
b) en fonction du calcul numérique:
que l'enfant décompose l'un des nombres en produit et applique l'associativité de la multiplication ou que l'enfant applique le principe qu'un produit reste invariant si on divise l'un des facteurs et multiplie l'autre facteur par le même nombre.

Remarques

i. Si le nombre de piles ou le nombre de jetons dans les piles est premier, une seule possibilité (faire une seule pile ou faire des piles de un jeton).

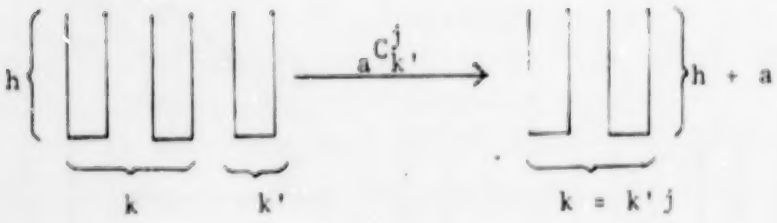
ii. En appliquant $B_k^p$ , l'enfant peut trouver autant de diviseurs de n que de produits kp égaux à $k_1$ .

Exemple pour 30



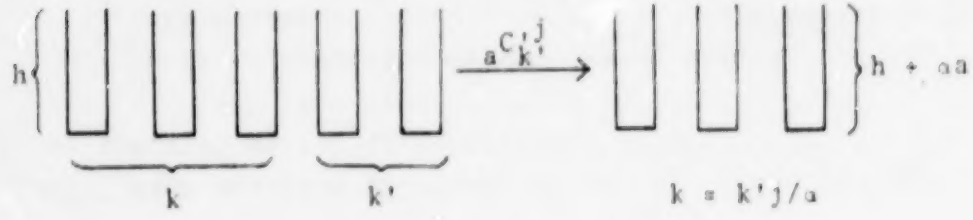
Cependant, si pour l'enfant les diviseurs trouvés sont 30, 15 et 10 parce qu'il s'intéresse à la hauteur des piles, on constate qu'en appliquant la commutativité (30 x 1, 15 x 2, 10 x 3) il obtient les trois autres diviseurs de 30: il transfère alors la hauteur des piles (nombre de jetons) au nombre de piles.

III Action $_{a}C^{j}_{k'}$ (séparer k' piles en j parties égales de a jetons et reporter les k'j parties sur les k'j piles restantes)




| | | |
|---|---|---|
| n = | (k + k') h | (décomposition du nombre de piles en somme) |
| = | kh + k'h | (distributivité) |
| = | kh + k' (ja) | (décomposition de h en produit) |
| = | kh + (k'j) a | (associativité) |
| = | kh + ka | (définition de $_{a}C^{j}_{k'}$) |
| = | k (h + a) | (mise en facteurs) |

Action $_{a}C'^{j}_{k'}$ (séparer k' piles en j parties égales de a jetons et reporter les parties sur k'j/a piles restantes)




$n = (k + k')\,h$ (décomposition du nombre de piles en somme)

$= kh + k'h$ (distributivité)

$= kh + k'(ja)$ (décomposition de h en produit)

$= kh + (k'j)\,a$ (associativité)

$= kh + (k\alpha)\,a$ (définition de $_{a}C'^{j}_{k'}$)

$= kh + k(\alpha a)$ (associativité)

$= k(h + \alpha a)$ (mise en facteurs)

Conditions d'application

a) en fonction du matériel:

que l'enfant cherche si un certain nombre de piles (k) divise le nombre de jetons d'une pile (h)
[k/h , condition suffisante]
ou
que l'enfant compare un certain nombre de piles au nombre total de jetons dans les autres piles.
[k/k'h , condition nécessaire et suffisante]

b) en fonction du calcul numérique:

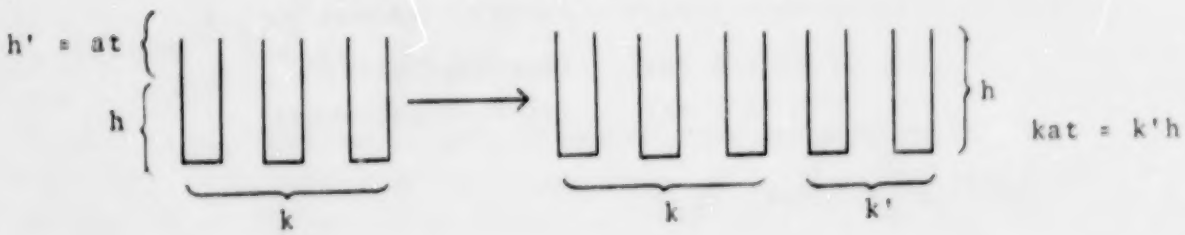
que l'enfant décompose l'un des facteurs en somme de telle sorte que l'un des termes divise l'autre facteur, puis qu'il applique la distributivité,

qu'il décompose le deuxième facteur en produit,
applique la commutativité et l'associativité,
puis fasse une mise en facteurs.

Exemples

$$
\begin{aligned}
30 &= 5 \times 6 \\
&= (3 + 2) \times 6 \\
&= (3 \times 6) + (2 \times 6) \\
&= (3 \times 6) + 2 \times (3 \times 2) \\
&= (3 \times 6) + (3 \times 2) \times 2 \\
&= (3 \times 6) + 3 \times (2 \times 2) \\
&= 3 \times (6 + 4) \\
&= 3 \times 10
\end{aligned}
$$

IV Action $_{k'}E^{a}_{t}$ (étêter les piles égales en t tranches de a jetons et former k' nouvelles piles)




| | | |
|---|---|---|
| $n = k\,(h + h')$ | | (décomposition du nombre de jetons en somme) |
| $= kh + kh'$ | | (distributivité) |
| $= kh + kat$ | | (définition de $_{k'}E^{a}_{t}$) |
| $= kh + k'h$ | | (définition de $_{k'}E^{a}_{t}$) |
| $= (k + k')\,h$ | | (mise en facteurs) |

Conditions d'application

a) en fonction du matériel:
que l'enfant cherche si un certain nombre de jetons

d'une pile (h) divise le nombre de piles (k)
[h/k , condition suffisante]
ou
que l'enfant compare un certain nombre de jetons
(une certaine hauteur) au nombre total de jetons enlevées.
[h/kh' , condition nécessaire et suffisante]

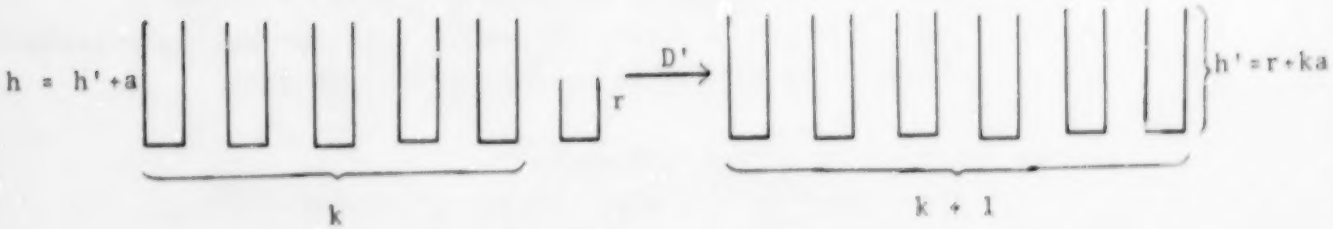
b) en fonction du calcul numérique:
même démarche que pour C et C' (voir III b))

Remarques

i. On constate que, pour obtenir 3 x 10 à partir de 5 x 6 (ou l'inverse), il serait plus simple d'utiliser l'associativité et la commutativité:
5 x 6 = 5 x (2 x 3) = (5 x 2) x 3 = 3 x (5 x 2) = 3 x 10
Ce dernier calcul ne correspond cependant à aucune action décrite.

ii. Les conditions d'application des actions C et celles de leurs inverses E sont duales l'une de l'autre: il s'agit de remplacer les k par h et vice versa.
Avec C , à partir de piles restantes (k') , on construit une nouvelle hauteur (h + a).
Avec E , à partir d'une hauteur restante (h') , on construit un nouveau nombre de piles (k + k').

V Action D' (étêter les piles égales pour compléter la pile restante)




$n = k\,(h' + a) + r$ (décomposition du nombre de jetons en somme)

$= kh' + ka + r$ (distributivité)

$= kh' + h'$ (définition de D')

$= (k + 1)\,h'$ (mise en facteurs)

Conditions d'application

a) en fonction du matériel:

que l'enfant cherche si un certain nombre de jetons (h') est égal aux jetons restants plus le nombre de jetons enlevés.

b) en fonction du calcul numérique:

en partant de $n = pq + r$ ,

que l'enfant cherche à réaliser la condition

$q - a = r + p\,a$

ou

qu'il transforme l'expression $pq + r$ en

$(p + 1)\,x$, d'où $x = \frac{pq + r}{p + 1}$ .

Exemple

$30 = (2 \times 11) + 8$ ou $30 = (2 \times 11) + 8$

$= (2 \times (11 - 1) + (8 + 2)$ $10 = \frac{(2 \times 11) + 8}{2 + 1}$

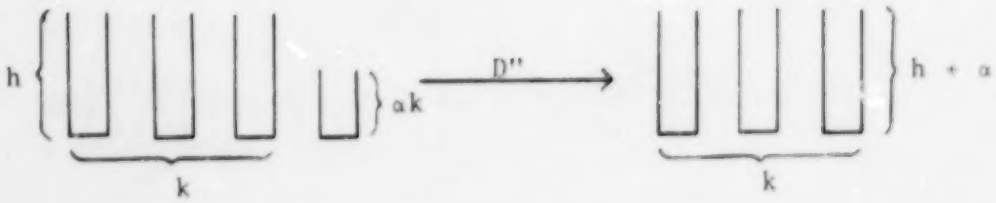
$= (2 + 1)(11 - 1)$ $3 \times 10 = 30$

$= 3 \times 10$

Remarque

Avec $r = o$ , $k' = 1$ , $t = 1$ , $D' = {}_1E_1^a$

VI Action D" (distribuer également le reste sur les piles)




$n = (k \times h) + r$ $(r = \alpha k)$

$= (k \times h) + (k \times \alpha)$

$= k(h + \alpha)$ (distributivité)

Conditions d'application

a) en fonction du matériel:

comparer le nombre de jetons restants (r) au nombre de piles égales (k). (Chercher si le reste est un multiple du nombre de piles complètes) [k/r] .

b) en fonction du calcul numérique:

décomposer le reste en un produit dont un des facteurs est égal à l'un des facteurs du premier produit et appliquer la distributivité.

Exemple:

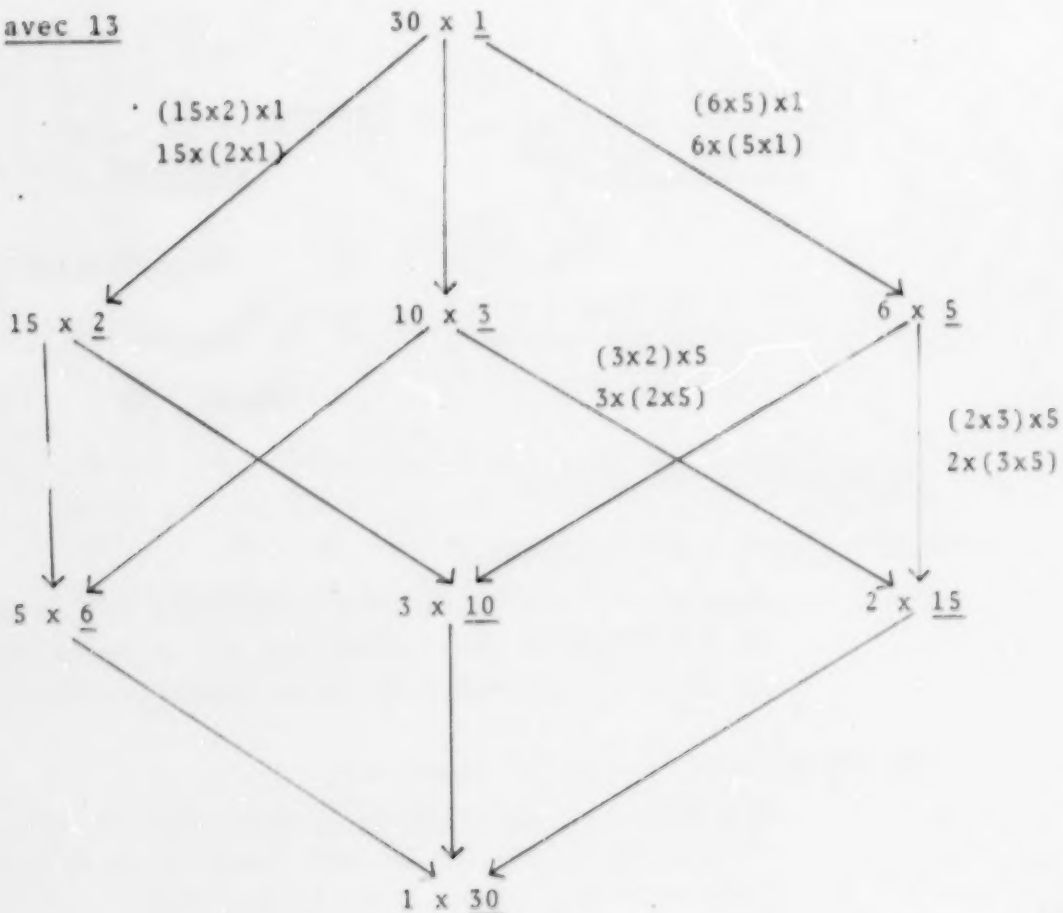
$$\begin{aligned} 30 &= (3 \times 8) + 6 \\ &= (3 \times 8) + (3 \times 2) \\ &= 3 \times (8 + 2) \\ &= 3 \times 10 \end{aligned}$$

Remarque

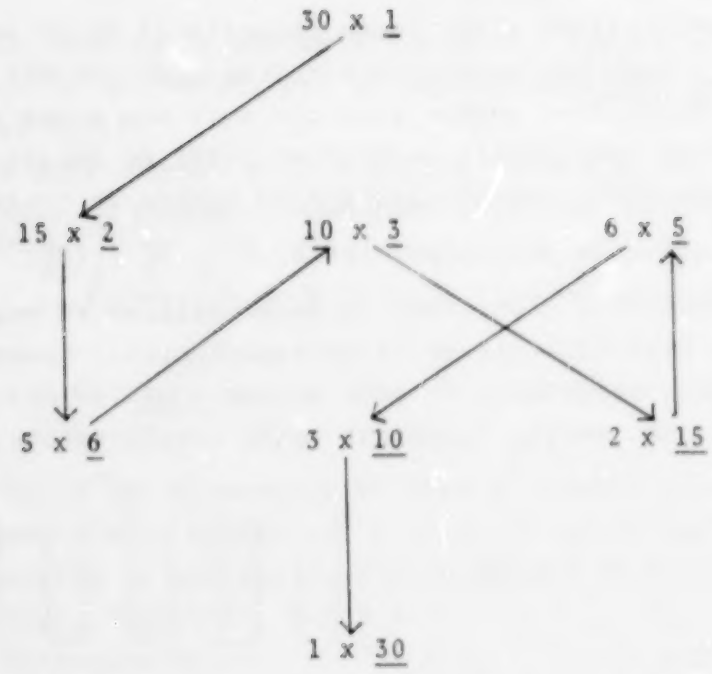
Avec $k' = 1$ , $h = r$ , $j = k$ , $D'' = {}_aC_1^k$

. Les calculs nécessaires à la formation des différents groupements de complexités variables.

(a)



(b)




Mêmes calculs en (a) et en (b)', sauf qu'en (a) il y a répétitions.

Considérations

. Les actions D et D" ne sont pas assez précises pour qu'on puisse les décrire mathématiquement.

. Il est plus difficile d'appliquer un B "faux" au niveau du calcul qu'au niveau de la manipulation. En effet, si on a 30 = 15 x 2, on constate que 15 n'est pas pair et on n'essaie pas (7 x 4) ÷ 2.

On pourrait se fixer comme objectif de faire acquérir à l'enfant les moyens nécessaires pour trouver tous les diviseurs d'un nombre quel que soit son point de départ et cela sans jamais revenir au point de départ. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre de cette façon, il suffit de développer les B, $B^{-1}$, $B_k^p$, $_1(B_k^p)^{-1}$, c'est-à-dire d'utiliser la décomposition en produits et l'associativité de la multiplication. Comment savoir, cependant, si on a trouvé <u>tous</u> les diviseurs? Voici un exemple illustant cette considération.

A partir de 6 x 15

En appliquant $B_k^p$ : $B_1^6$ donne 1 x 90

$B_2^3$ donne 2 x 45

$B_3^2$ donne 3 x 30

On décompose 6 en facteurs.
Le nombre de piles est diminué.

En appliquant $(B_k^p)^{-1}$ : $(B_6^{15})^{-1}$ donne 90 x 1

$(B_6^3)^{-1}$ donne 18 x 5

$(B_6^5)^{-1}$ donne 30 x 3

On décompose 15 en facteurs.
Le nombre de piles est augmenté.

On voit qu'il manque les produits 9 x 10 et 10 x 9 qui s'obtiennent par décomposition <u>simultanée</u> de 6 et de 15:

$6 \times 15 \longrightarrow 2 \times (3 \times 3) \times 5 \longrightarrow 9 \times 10$ ou $10 \times 9$.

Mais on pourrait cependant y arriver en deux temps:

$$6 \times 15 \xrightarrow{B_3^2} 3 \times 30 \xrightarrow{(B_3^3)^{-1}} 9 \times 10$$

$$6 \times 15 \xrightarrow{(B_6^5)^{-1}} 30 \times 3 \xrightarrow{B_{10}^3} 10 \times 9$$

Une façon économique et sûre de trouver tous les diviseurs d'un nombre est d'utiliser la décomposition du nombre en ses facteurs premiers.

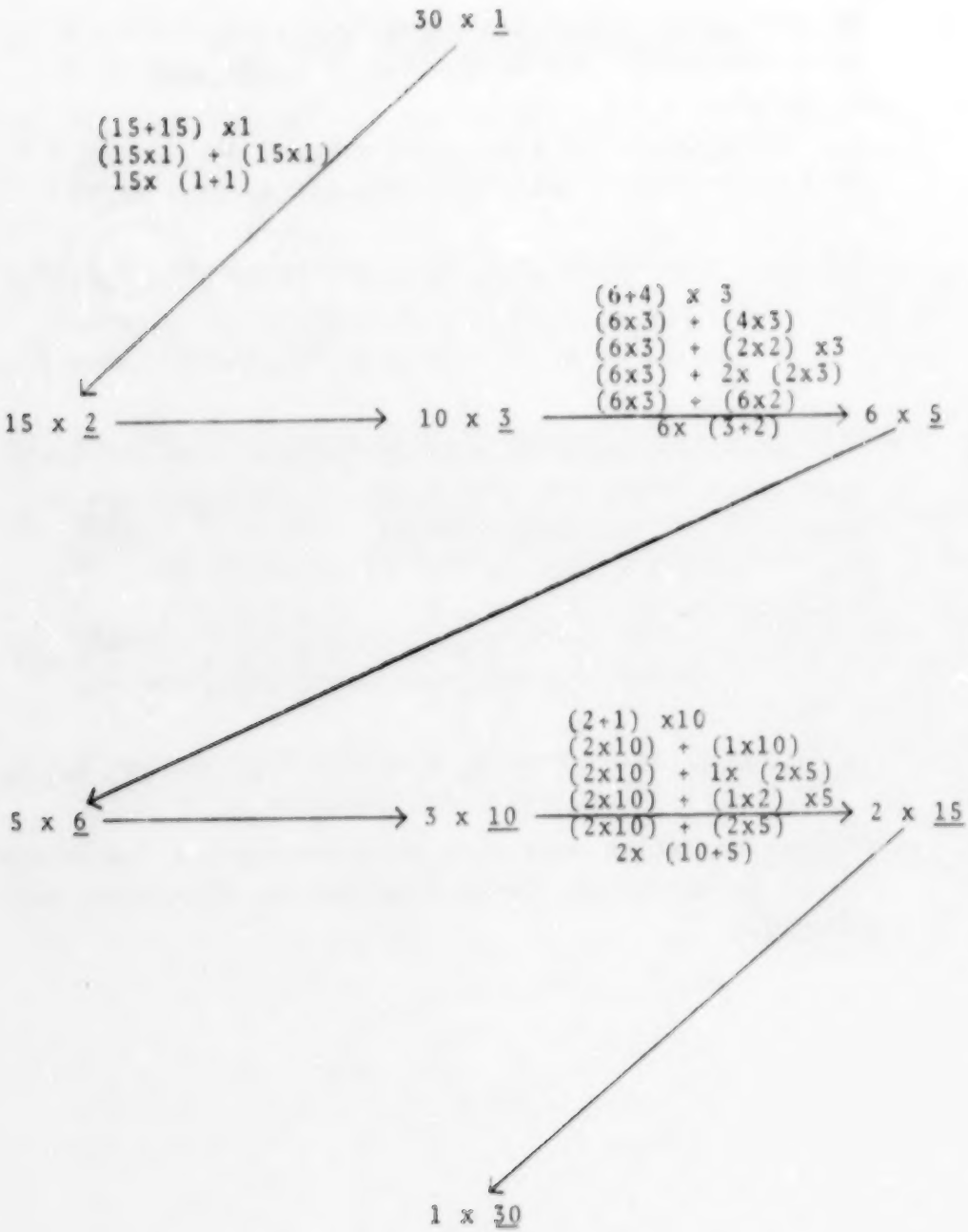
Vig. $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| diviseurs de 60: | 1 | 2 x 2 | 2 x 2 x 3 | |
| | 2 | 2 x 3 | 2 x 2 x 5 | 2 x 2 x 3 x 5 |
| | 3 | 2 x 5 | 2 x 3 x 5 | |
| | 5 | 3 x 5 | | |

12 diviseurs: 1, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 15, 12, 20, 30, 60

L'expérimentation peut-elle conduire à cette "technique"? Est-ce souhaitable? Cette démarche est mécanique, non dynamique.

Avec E .




. Comment utiliser cette recherche pour développer les propriétés arithmétiques sous-jacentes?

## G. Extension possible de la recherche

a) Utiliser le matériel des bandes (ou un autre matériel) pour tester l'unité d'enseignement construite avec les tiges (transfert).

b) Adapter l'unité d'enseignement construite avec les tiges au matériel des bandes (ou autres, comme rectangles) et comparer les résultats.

c) Appliquer la démarche à d'autres notions mathématiques.

d) Reprendre la même recherche avec des nombres, puissances de 2 par exemple, ou ayant d'autres propriétés.

e) Montrer l'influence d'un matériel choisi en analysant une même expérience avec tiges et bandes.

f) Observer les différents schèmes utilisés par un enfant selon qu'il manipule les tiges ou les bandes.

## H. Conclusions

1) Dans une nouvelle expérimentation, avec un plus grand nombre d'enfants, un seul matériel, une observation améliorée par l'utilisation du vidéo, tenter de mieux déceler les actions définies B, C, D, E, d'identifier le plus possible les actions A (indéterminées) et $A'_i$ (non clairement identifiables) en fonction d'actions déjà trouvées ou de nouvelles actions.

2) Suite à l'étude théorique sur la participation des actions dans la recherche des diviseurs d'un nombre, expérimenter sur des nombres dont les diviseurs sont facilement atteignables par les actions décrites.

3) Continuer d'expérimenter avec des enfants de 2ème et 3ème années, pour les même raisons données dans les conclusions de l'étape 3.

4) A l'aide d'une banque de schèmes établie à l'avance, chercher à repérer si possible, parallèlement aux actions, des schèmes opératoires qui expliqueraient les $A_i$ et sous-tendraient les autres actions. Chercher à expliquer les faux schèmes (mathématiquement peut-être) qui conduisent à de faux résultats, de façon à les utiliser dans l'unité d'enseignement.

Etape 5 (septembre 1979)

A. Objectifs particuliers

Observer d'une façon aussi systématique que possible les schèmes opératoires et les actions utilisées par les enfants dans la recherche des diviseurs d'un nombre et étudier la pertinence de ces schèmes et de ces actions dans l'élaboration de l'unité d'enseignement.

B. Expérimentation

Matériel: tige sur un support et jetons troués.

Nombre: 60

Clientèle: Dix-huit (18) enfants de 2ème année.
Dix-huit (18) enfants de 3ème année.
Deux (2) écoles.

Déroulement

Question: Tu dois placer les jetons dans les tiges pour avoir des piles de même hauteur.
Cherche toutes les façons possibles.

Chaque expérimentation avec un enfant sera enregistrée sur vidéo et se déroulera en présence de deux (2) expérimentateurs, plus l'assistant technicien.

# Expérimentation sur les diviseurs d'un nombre

M. Fortier
B. Héraud
L. Thérien

date:

Nom:

école:

âge:

niveau:

groupe:

Commentaires:

Grille d'observation

Pré-Expérimentation sur les diviseurs d'un nombre

Question: Quel(s) plateau(x) peux-tu prendre pour qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque assiette? ... Peux-tu le faire avec d'autres? "Tu peux mettre plusieurs jetons dans chaque assiette, si tu veux."

---

6 jetons

| no du plateau ou cardinalité des sous-ensembles | PLATEAUX | | SOUS-ENSEMBLES | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | no de l'essai | Distribution n à n et changements selon R ou E | no de l'essai | R ou E | Commentaires particuliers |
| 1 | | 6 autre | | | |
| 2 | | 1 2 3 autre | | | |
| 3 | | 1 2 autre | | | |
| 4 | | 1 2 autre | | | |
| 5 | | 1 2 autre | | | |
| 6 | | 1 autre | | | |
| autre | | | | | |

Commentaires globaux (stratégies)

Grille d'observation

Pré-Expérimentation sur les diviseurs d'un nombre

Question: Quel(s) plateau(x) peux-tu prendre pour qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque assiette? ... Peux-tu le faire avec d'autres? Tu peux mettre plusieurs jetons dans chaque assiette, si tu veux."

---

5 jetons

| no du plateau ou cardinalité des sous-ensembles | PLATEAUX | | SOUS-ENSEMBLES | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | no de l'essai | Distribution n à n et changements selon R ou E | no de l'essai | R ou E | Commentaires particuliers |
| 1 | | 5 autre | | | |
| 2 | | 1 2 3 autre | | | |
| 3 | | 1 2 autre | | | |
| 4 | | 1 autre | | | |
| 5 | | 1 autre | | | |
| autre | | | | | |

Commentaires globaux (stratégies)

---

1 jeton

| no du plateau ou cardinalité des sous-ensembles | PLATEAUX | | SOUS-ENSEMBLES | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | no de l'essai | Distribution n à n et changements selon R ou E | no de l'essai | R ou E | Commentaires particuliers |
| 1 | | | | | |
| autre | | | | | |

Commentaires globaux (stratégies)

Grille d'observation

Pré-Expérimentation sur les diviseurs d'un nombre

Question: Quel(s) plateau(x) peux-tu prendre pour qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque assiette? ... Peux-tu le faire avec d'autres? "Tu peux mettre plusieurs jetons dans chaque assiette, si tu veux."

9 jetons

| no du plateau ou cardinalité des sous-ensembles | PLATEAUX | | SOUS-ENSEMBLES | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | no de l'essai | Distribution n à n et changements selon R ou E | no de l'essai | E ou E | Commentaires particuliers |
| 1 | | 9 autre | | | |
| 2 | | 1 2 3 4 autre | | | |
| 3 | | 1 2 3 autre | | | |
| 4 | | 1 2 3 autre | | | |
| 5 | | 1 2 autre | | | |
| 6 | | 1 2 autre | | | |
| 7 | | 1 autre | | | |
| 8 | | 1 autre | | | |
| 9 | | 1 autre | | | |
| autre | | | | | |

Commentaires globaux (stratégies)

Grille d'observation

Pré-Expérimentation sur les diviseurs d'un nombre

Question: Quel(s) plateau(x) peux-tu prendre pour qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque assiette? ... Peux-tu le faire avec d'autres? "Tu peux mettre plusieurs jetons dans chaque assiette, si tu veux."

12 jetons

| no du plateau ou cardinalité des sous-ensembles | PLATEAUX | | SOUS-ENSEMBLES | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | no de l'essai | Distribution n à n et changements selon R ou E | no de l'essai | R ou E | Commentaires particuliers |
| 1 | | 12 autre | | | |
| 2 | | 1 2 3 4 5 6 autre | | | |
| 3 | | 1 2 3 4 5 autre | | | |
| 4 | | 1 2 3 4 autre | | | |
| 5 | | 1 2 3 autre | | | |
| 6 | | 1 2 3 autre | | | |
| 7 | | 1 2 autre | | | |
| 8 | | 1 2 autre | | | |
| 9 | | 1 autre | | | |
| 10 | | 1 autre | | | |
| 11 | | 1 autre | | | |
| 12 | | 1 autre | | | |
| autre | | | | | |

Commentaires globaux (stratégies)

Questions supplémentaires à poser à la fin de l'expérimentation.

1. Lorsqu'on te donne des jetons, comment fais-tu pour trouver les plateaux (ou faire des paquets)?
   As-tu toujours procédé de la même façon?

2. (S'il y a lieu) Est-ce que ce que tu viens de faire te rappelle quelque chose que tu as appris en classe?

3. a) Par quels nombres peux-tu diviser 6, ..., 5, ..., 1, ..., 9, ..., 12, ...?

   b) Quels nombres peux-tu multiplier ensemble pour faire 6, ..., 5, ..., 1, ..., 9, ..., 12, ...?